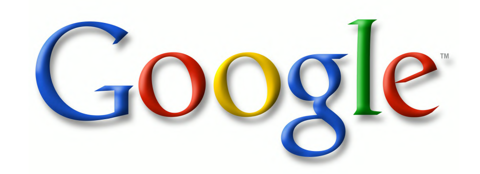


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

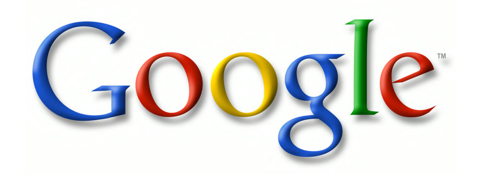
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

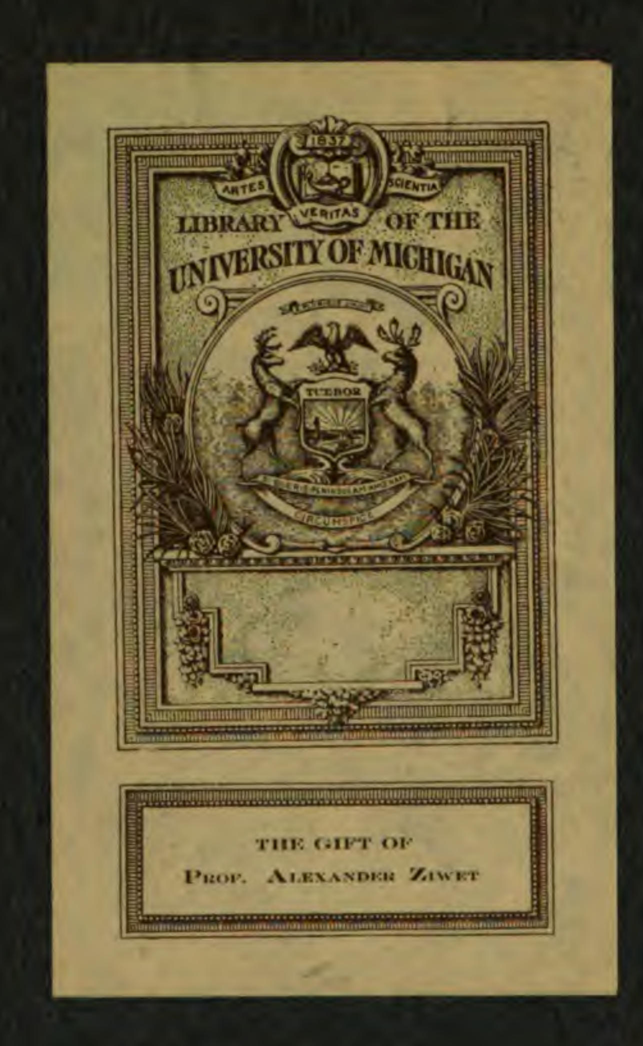
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 475215


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET





Alexander Ziwet

Mathematics
QA
261
.S38

GRUNDLAGEN DER VEKTOR- UND AFFINORANALYSIS

VON

J. A. SCHOUTEN

MIT EINEM EINFÜHRUNGSWORT VON F. KLEIN
UND 28 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1914

COPYRIGHT 1914 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS VORBEHALTEN.

BEQUEST OF
ALEXANDER ZIWET.
Math
6-22-1932

ZUR EINFÜHRUNG.

Herr Dr. J. A. Schouten ist seither in Rotterdam als Elektrotechniker tätig gewesen und ist von den elektrotechnischen Problemen aus durch eigene Kraft zu den Theorien durchgedrungen, die er im folgenden darlegt.

Es handelt sich darum, die geometrischen Größen, die in der Vektoranalysis und den Gibbsschen Dyaden, Triaden usw. auftreten, auf Grund des gruppentheoretischen Prinzips zu untersuchen, das s. Z. von mir aufgestellt wurde: daß alle Geometrie Invariantentheorie einer Gruppe ist, man aber hinsichtlich der zugrunde zu legenden Gruppe in weitem Umfange freie Wahl hat.

Die Untersuchungen des Herrn Schouten sind umsomehr zu begrüßen, als es das erste Mal ist, daß die hier anknüpfenden Entwicklungen, welche allein zu einer rationellen Einteilung der geometrischen Gebilde zu führen scheinen, von einem Manne der Praxis aufgenommen werden. Die besondere Leistung von Herrn Schouten ist, daß er das Prinzip auch in höheren Fällen folgerichtig durchführt. Die dabei hervorkommenden Gebilde höherer Art sind selbstverständlich zum Teil in Mechanik und Physik schon öfter aufgetreten, aber sie dürften bisher noch nicht in dem Umfange, wie es hier geschieht, in systematischer Vollständigkeit aufgezählt sein.

Göttingen, im Juni 1914

Klein.

VORWORT.

Es ist für einen Autor von unschätzbarem Wert, wenn er schon während der Bearbeitung seines Stoffes freundliches Interesse für seine Sache findet. Er findet dadurch Gelegenheit, seine Gedanken anderen gegenüber auszusprechen, bevor sie definitiv niedergeschrieben werden, was sehr zur Klärung seines Gedankeninhalts beiträgt.

Dieses freundliche Interesse ist mir nun im vollsten Maße entgegengebracht, und zwar von so vielen Seiten, daß es nicht möglich wäre, hier alle Namen einzeln zu nennen. Ich muß mich also darauf beschränken, hier im allgemeinen allen, die mir in dieser Weise die Arbeit erleichtert haben, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Eine Ausnahme sei gemacht für diejenigen Herren, die freundlichst bereit waren, mir durch ihren guten Rat einen Teil ihrer größeren Erfahrung zur Verfügung zu stellen. Diesen Herren, Professor Dr. J. A. Barrau in Groningen, Professor Dr. C. Carathéodory in Göttingen, Professor Dr. J. Cardinaal in Delft, Geheimen Hofrat Professor Dr. Th. des Coudres in Leipzig, Geheimen Regierungsrat Professor Dr. F. Klein in Göttingen und Professor Dr. H. A. Lorentz in Harlem, meinen ganz besonderen Dank!

Meinem Freunde Herrn Dr. F. Roesener in Göttingen meinen herzlichen Dank für das Mitlesen der Korrekturbogen.

Delft, im Mai 1914

J. A. Schouten.

INHALT.

Seite

Erstes Kapitel.

Die assoziativen Zahlensysteme und ihre Beziehungen zu den geometrischen Größen bis zur ersten Ordnung.

Zweites Kapitel.

Die Beziehungen der assoziativen Zahlensysteme zu den geometrischen Größen höherer Ordnung.

Drittes Kapitel.

Die Multiplikationsregeln der Affinoranalysis unabhängig vom Bezugssystem.

Viertes Kapitel.

Die Dyadenrechnung und die Beziehungen der Affinoranalysis zu anderen Analysen zweiter Ordnung.

Fünftes Kapitel.

Die Infinitesimalrechnung in der Affinoranalysis.

Sechstes Kapitel.

Anwendungen.

EINLEITUNG

„Mathematics is the science which
draws necessary conclusions."
Benjamin Peirce.[1]

Nachdem die schon von Leibniz behauptete Existenz von Analysen, in denen die geometrischen Größen selbst, und nicht nur ihre zahlenmäßigen Beziehungen in die Formeln eingehen, durch die Graßmannsche Ausdehnungslehre[2]), sowie durch den Hamiltonschen Quaternionenkalkül[3]) bewiesen war, hat es nicht an Versuchen gefehlt, einerseits den Bereich dieser direkten Analysen zu erweitern, andererseits die scheinbar grundverschiedenen Prinzipien der beiden Systeme unter einen Gesichtspunkt zu bringen. Ein wesentlicher Fortschritt wurde jedoch erst erzielt durch Gibbs[4]), dem es nicht nur gelang, durch Synthesis der Graßmannschen und Hamiltonschen Gedanken ein praktisch recht brauchbares System, die heutige Vektoranalysis, zu schaffen, sondern auch in seinen Dyaden, Triaden usw. einen Ansatz zu Systemen höherer Ordnung zu geben. Obwohl durch die Gibbssche Vektoranalysis in praktischer Hinsicht eine Synthesis zustande gekommen war, wurde die Einigung dem Begriffe nach zunächst eigentlich wenig gefördert, da die Vektoranalysis, die nur zum praktischen Gebrauch aufgebaut war, keineswegs imstande war die Quaterionentheorie und die Ausdehnungslehre vollständig zu umfassen, und infolgedessen neben den Quaternionisten und den Bivektorianern Graßmannscher Schule noch Monovektorianer Gibbsscher Schule entstanden, sodaß der Zwiestreit in einen Streit dreier überging.

Dieser Streit, in welchem jetzt seit mehr als zwanzig Jahren auf allen Seiten in der hartnäckigsten Weise gekämpft wird, und dessen Ende bisher noch nicht vorhergesagt werden konnte, ist eine der merkwürdigsten Erscheinungen in der Geschichte der Mathematik. Die Merkwürdigkeit liegt darin, daß es sich dabei nicht, wie vielfach angenommen wird, etwa nur um Fragen der Notation handelt, denn solche Fragen, wo der persönliche Geschmack starken Einfluß übt, sind ja immer bevorzugte Streitpunkte, und der Mathematiker wäre ihnen gegenüber nicht in besserer

1) 81. 1 S. 97. 2) 44. 1. 3) 53. 1. 4) 81. 4, 84. 2.

Lage als jeder andere. Es handelt sich im Gegenteil gerade um Fragen wie: ist eine gegebene Größe positiv oder negativ, ist eine gegebene Größe einer anderen gegebenen Größe gleich oder nicht, ist ein gegebener Operator einem anderen gegebenen Operator gleich oder nicht — alles Fragen, auf welche wir, wenigstens auf so elementaren Gebieten der Mathematik, gewohnt sind, eine eindeutige und sicherbegründete Antwort zu bekommen. Wie Macfarlane[1]) denn auch 1910 sehr richtig bemerkte, sind die Fragen der Notation Nebensache. Sie werden sich bald beantworten lassen, wenn man sich einmal über die tiefergehenden Fragen, welche die Grundbegriffe betreffen, geeinigt hat.

Es erhebt sich die Frage: was ist der Grund dieser in der Mathematik so ganz ungewohnten Unsicherheit, eine Unsicherheit, die Ursache ist, daß manche bedeutende Mathematiker die gesamten direkten Analysen als eigentlich nicht zur Mathematik gehörige mathematische Schnellschriftarten betrachtet haben, dem der richtige Mathematiker wenig Interesse entgegenzubringen braucht, und daß andere kopfschüttelnd an dem Nutzen des ganzen Streites zweifelten und die Meinung aussprachen, man könne die Sache so oder so nehmen, es herrsche in diesen Systemen eben nur der persönliche Geschmack. Ein solcher Grund muß vorhanden sein, denn, wo auch auf anderem, genügend durchforschtem mathematischen Gebiet, verschiedene mögliche Annahmen gemacht werden konnten, die zunächst willkürlich erschienen, gelang es später stets von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus jeder Annahme ihren genau bestimmten Platz anzuweisen und ihre Berechtigung sowie ihre Grenzen genau anzugeben. Mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit dürfen wir also auch hier erwarten, daß ein allgemeiner Gesichtspunkt, wenn auch noch nicht bekannt, so doch vorhanden ist.

Treten wir der Sache näher. Systeme höherer komplexer Zahlen werden angewandt auf geometrische Größen, Linienteile, Ebenenteile usw. Liegt die Unsicherheit in den komplexen Zahlensystemen? Nein. Denn, abgesehen davon, daß der eine Mathematiker mal einen Fehler eines anderen auffindet und verbessert, herrscht über die Theorie der komplexen Zahlensysteme die größte Einstimmigkeit. Liegt die Unsicherheit dann in den geometrischen Tatsachen? Auch dort nicht. Denn die geometrischen Gebiete, um welche es sich handelt, sind so vollständig bekannt, daß auch hier keine Meinungsunterschiede mehr auftreten können. Die Unsicherheit muß also entstehen bei der Verknüpfung der Zahlensysteme mit den geometrischen Größen. Diese Verknüpfung geschah nun aber bisher auch immer so, daß zu bestimmten geometri-

1) 10. 2.

schen Größen ein Zahlensystem „gegeben" wurde, und die Richtigkeit der Wahl sich eigentlich erst nachher durch die völlige Korrespondenz der geometrischen und algebraischen Eigenschaften erweisen mußte. Natürlich haben die Schöpfer der Systeme sich auch immer bemüht, ihr System von vornherein zu begründen, und namentlich Graßmann hat sich an der Begründung seiner Ausdehnungslehre sehr viel gelegen sein lassen. Immerhin ist man sich aber doch über die invariantentheoretische und gruppentheoretische Bedeutung der Ausdehnungslehre[1]), sowie auch der Quaternionentheorie[2]), erst in späterer Zeit klar geworden. Es liegt also gerade in dieser Verknüpfung der Systeme mit den Größen eine Quelle der Unsicherheit, und die Möglichkeit des Auftretens von Meinungsunterschieden in der Folge erklärt sich damit auf einen Schlag.

Eine solche Erklärung wäre nun wenig nützlich, wenn nicht zu gleicher Zeit der Weg angegeben würde, wie man, ausgehend von gegebenen geometrischen Größen, mit Vermeidung aller Unsicherheiten, zu dem zugehörigen Zahlensystem gelangen kann. Dieser Weg war aber erst vorhanden, nachdem Klein das Prinzip der Klassifizierung der Geometrien und geometrischen Größen nach ihrem Verhalten bei verschiedenen Transformationsgruppen aufgestellt hatte. Nach dem Kleinschen Prinzip[3]) ist eine Geometrie Invariantentheorie einer ganz bestimmten Transformationsgruppe, und eine geometrische Größe der Inbegriff einer Anzahl Bestimmungszahlen besonderer Art. Sind in einem Raume von n Dimensionen m Punkte $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ durch ihre Koordinaten

$$p_{i1}, \ldots, p_{in}, \qquad i = 1, \ldots m$$

in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem gegeben, so können aus diesen Koordinaten eine beliebige Anzahl z. B. q Funktionen r gebildet werden:

$$(1) \qquad \begin{aligned} r_1 &= f_1(p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}, p_{21}, \ldots, p_{mn}) \\ r_2 &= f_2(\qquad\qquad \cdot \qquad\qquad) \\ &\vdots \\ r_q &= f_q(\qquad\qquad\qquad\qquad), \end{aligned}$$

die wir als die Bestimmungszahl eines neuen mathematischen Objekts $\mathfrak{r}$ betrachten können. Wird jetzt das Koordinatensystem den Transformationen einer beliebigen Transformationsgruppe mit den Parametern $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ unterworfen, so ist:

$$(2) \qquad p'_{ij} = \varphi_{ij}(p_{11}, \ldots, p_{mn}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots m \\ j = 1, \ldots n \end{matrix}$$

1) Vgl. Study-Engel, Anmerkungen zu 94. 1 S. 405.

2) Burkhardt 93. 8.

3) 72. 1, 93. 9, 93. 10, 02. 2, 06. 2, 09. 18.

und:

(3) $$r_k = f_k(p'_{11}, p'_{12}, \ldots, p'_{1n}, p'_{21}, \ldots, p'_{mn}),$$

oder, durch Substitution von (2):

(4) $$r'_k = \psi_k(p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}, p_{21}, \ldots, p_{mn}).$$

Die neuen Zahlen $r_1', \ldots, r_q'$ können wir auffassen als die Bestimmungszahlen desselben mathematischen Objekts $\mathfrak{r}$ in bezug auf das neue Koordinatensystem. Wenn es nun möglich ist, aus (1) und (4) die Bestimmungszahlen p zu eliminieren, und also die r' rein als Funktionen der r und der Parameter der Transformation α anzugeben:

$$r'_k = \omega_k(r_1, \ldots, r_q, \alpha_1, \ldots, \alpha_s),$$

so ist $\mathfrak{r}$ vollständig bekannt, wenn nur seine Bestimmungszahlen in bezug auf irgend ein Koordinatensystem gegeben sind. In diesem Falle, wo die Bestimmungszahlen von $\mathfrak{r}$ sich, wie man sagt, in sich transformieren, nennt Klein $\mathfrak{r}$ eine geometrische Größe.[1])

Eine geometrische Größe existiert also nur bei ganz bestimmten Transformationsgruppen, und kann bei anderen, bei denen die Eigenschaft des Insichtransformiertwerdens nicht besteht, als solche zerstört werden (vgl. S. 24). Ferner erscheint die Art und Weise, wie die Bestimmungszahlen sich bei der zugrunde gelegten Gruppe transformieren, oder, wie wir kurz sagen wollen, die Orientierungsweise, als charakteristische Eigenschaft einer solchen Größe, und wir gelangen so zu dem Kleinschen Klassifizierungsprinzip, nach welchem alle Größen gleicher Orientierungsweise als von gleicher Art angesehen werden.

Betrachten wir die geometrischen Größen von diesem Standpunkt, so ist zunächst klar, daß die Frage nach dem Zahlensystem für die Größen eines bestimmten, z. B. des dreidimensionalen Raumes, ohne Angabe der Transformationsgruppe, die der Betrachtung zugrunde gelegt werden soll, gar keinen Sinn hat. Denn je nachdem dann die eine oder die andere Transformationsgruppe bewußt oder unbewußt zugrunde gelegt wird, kann man verschiedene Systeme erhalten, und es läßt sich zeigen, daß in der Tat die verschiedenen vorhandenen Analysen sich gerade in solcher Weise unterscheiden.

Wird die Transformationsgruppe aber mitgegeben, so ist die Frage eine ganz bestimmte, wenn zunächst festliegt, was wir unter Addition verstehen wollen.[2]) Denn da die Multiplikation ja nichts anderes ist als

---

1) 09. 18, S. 59.

2) Die Addition selbst läßt sich in ähnlicher Weise gruppentheoretisch behandeln. Es zeigt sich, daß die Addition in Beziehung steht zur Gruppe der Translationen. (Vgl. Schur, 88.1.) Da über die Definition der Addition von Vektoren im allgemeinen Einstimmigkeit herrscht, wird diese hier nicht weiter diskutiert.

eine zur Addition distributive Verknüpfung, bedeutet die Frage nach dem Zahlensystem bestimmter geometrischer Größen (d. h. also Größen bestimmter Orientierungsweise) nichts anderes, als die Frage nach der allgemeinsten distributiven Verknüpfung dieser Größen, in der keine Teile anderer Orientierungsweise enthalten sind. Da aber die allgemeinste Orientierungsweise, und also, nach dem Kleinschen Klassifizierungsprinzip, auch die allgemeinste geometrische Art eines Produktes stets, eben des distributiven Gesetzes wegen, vollkommen gegeben ist durch die Orientierungsweisen der beiden Faktoren, so läßt sich diese Frage stets sehr einfach beantworten. Man gelangt bei der Beantwortung zu einem System, das im allgemeinen noch einige Zahlenparameter enthalten wird, und also eigentlich ein Systemkomplex ist. Dieser Systemkomplex umfaßt aber sicher sämtliche für die gegebenen Größen möglichen Zahlensysteme, da, außer dem distributiven Gesetz, dem ja jede Multiplikation gehorchen muß, keinerlei weitere Voraussetzungen gemacht sind.

Wir gelangen also zu dem verlangten allgemeinsten Gesichtspunkt, der uns ermöglicht zu jeder Gruppe genau definierter geometrischer Größen sofort den zugehörigen Systemkomplex anzugeben, wenn wir das Kleinsche Prinzip nicht nur zur Klassifizierung von Größen, sondern auch zur Schaffung von Zahlensystemen verwenden.[1]) Außer einer Arbeit Graßmanns von 1855[2]), in der verschiedene allgemeine Eigenschaften der Multiplikationen von Vektoren, durch Änderung der Koordinaten, also vermittels bestimmter Transformationen abgeleitet werden (vgl. S. 122), und einer Arbeit von Voigt von 1904[3]), in der die Transformationsweise der Bestimmungszahlen von Größen verwendet wird zur Auffindung einiger Multiplikationen zweiter Ordnung (vgl. S. 151), sind keine Versuche in dieser Richtung zu verzeichnen. Das Kleinsche Prinzip dürfte also unseres Wissens hier zum erstenmal zur Bildung vollständiger Zahlensysteme herangezogen sein.

Das Prinzip erwies sich als ungemein fruchtbar. Wie im ersten Kapitel gezeigt wird, gelangt man für die Größen in einem Punkt in drei Dimensionen unter Zugrundelegung der Gruppe der Drehungen für

---

1) Erst damit ist der Zeitpunkt eingetreten, wo die oben geforderte begriffliche Einheit vorhanden ist und also über Fragen der Notation wirklich fruchtbar diskutiert werden könnte. Nach des Verfassers Meinung wäre es aber zu empfehlen, die Diskussion, oder doch wenigstens die endgültigen Festsetzungen so lange aufzuschieben, bis auch die Systeme dritter und vierter Ordnung ausgearbeitet sind, da sich dabei doch noch manche überraschende Erweiterung des Gesichtskreises, namentlich in bezug auf die verschiedenen Grundmultiplikationen, ergeben könnte. 2) 55. 1. 3) 04. 5.

die Haupteinteilung der Größen in Ordnungen, und der Gruppe der speziellen affinen Transformationen für die feinere Unterscheidung, zu einem System mit 12 Einheiten, das noch einige Parameter enthält. Es zeigt sich aber, daß die Wahl dieser Parameter gruppentheoretisch unwesentlich ist, daß man sich also bei einer bestimmten Wahl geometrisch keine Beschränkung auferlegt, und ferner, daß unter allen möglichen Systemen nur ein assoziatives ist, das, weil einfacher für die Rechnung, den anderen vorzuziehen ist. Dasselbe umfaßt, wie zu erwarten war, sämtliche bisher existierenden Systeme, und ist, da es sich aus drei Quaternionensystemen auf drei verschiedenen Stufen zusammenstellt, sehr übersichtlich und leicht zu handhaben. An diesem System wird jetzt die Zerlegung der Hauptmultiplikation in zwei Grundmultiplikationen vollzogen, es werden die abgeleiteten Multiplikationen gebildet, seine geometrische Bedeutung und seine Beziehungen zur Quaternionentheorie, zur Vektoranalysis und zur Ausdehnungslehre besprochen, wobei auch die drei Hauptpunkte des Streites der verschiedenen Schulen klargelegt werden. Die Bedeutung und Berechtigung der verschiedenen Systeme und ihre Beziehungen zu bestimmten Transformationsgruppen treten deutlich zutage, und nur das + Zeichen der Vektoranalysis ($\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = +1$) erweist sich als unbegründet. Lassen wir die feinere Unterscheidung vermittels der speziellen affinen Gruppe beiseite, so geht das System zurück auf ein ursprüngliches System (vgl. S. 16) zweiter Ordnung, die Quaternionen mit zerlegter Multiplikation, oder die Vektoranalysis mit $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -1$. Das Kapitel schließt mit der Angabe der Systeme bis zur ersten Ordnung für mehrere Dimensionen und ihrer Beziehungen zur Ausdehnungslehre, einigen kurzen Angaben über die Bildung der Systeme der gebundenen Größen, und einer Besprechung der polaren und axialen Größen.

Im zweiten Kapitel wird dasselbe Verfahren angewandt zur Bildung der Analysis bis zur zweiten Ordnung, der Affinoranalysis. Die feinere Unterscheidung der Größen vermittels der speziellen affinen Gruppe wird hier fortgelassen, da sie vorläufig keine praktische Bedeutung hat. Es zeigt sich, daß die Analysis als ursprüngliches System (vgl. S. 16) dritter Ordnung (9 Einheiten) aufzufassen ist. Zu den Skalaren und Vektoren gesellen sich Größen zweiter Ordnung (mit 5 Einheiten), Deviatoren, zusammen die allgemeinsten Größen, Affinoren, bildend. Die Hauptmultiplikation zerfällt in 3 Grundmultiplikationen, die skalare, die vektorische, und eine neue, die deviatorische. Nach Einführung der Begriffe des oberen und unteren Affinors, bzw. der oberen und unteren Multiplikation, erfolgt die geometrische Deutung der verschiedenen Größen. Zum Schluß wird der Weg zur Ableitung der Systeme höherer Ordnung angegeben. Das System der Größen bis zur dritten Ordnung ist

ein ursprüngliches System vierter Ordnung (16 Einheiten), und es gesellt sich zu den vorigen Größen eine dritter Ordnung (7 Einheiten), während die Multiplikation in 4 Grundmultiplikationen zerfällt, usw. Namentlich zeigt sich dabei, wie sämtliche Analysen eine einzige zusammengehörige und durchgehende Reihe bilden, deren erste die Vektoranalysis ist, allerdings nur wenn sie mit dem Minuszeichen ($\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -1$) versehen wird. Das Kapitel schließt mit einer Übersicht über das Vorkommen der geometrischen Größen bis zur vierten Ordnung und der Angabe einer allgemeinen Regel für die Orientierungsweise der Produkte von Größen beliebiger Ordnung.

Im dritten Kapitel werden die Rechnungsregeln der Affinoranalysis freigemacht von Koordinaten. Nachdem die Begriffe der affinorischen und dyadischen Multiplikation festgelegt sind, werden die verschiedenen Produkte von zwei, drei und vier Vektoren angegeben. Eine Tabelle erleichtert die Übersicht. Nachdem die wichtigsten Produkte von Vektoren mit Affinoren und Affinoren unter sich angegeben sind, werden die Grundsätze, die bei der Wahl der Symbole und Zeichen befolgt sind, kurz zusammengefaßt.

Im vierten Kapitel kommen die Dyadenrechnung und die Beziehungen zu anderen Analysen zweiter Ordnung zur Sprache. Das Rechnen mit Dyaden, den einfachen Operatoren zweiter Ordnung, gestaltet sich in der Affinoranalysis besonders einfach.

Das fünfte Kapitel ist der Infinitesimalrechnung gewidmet. Die Behandlung ist zunächst allgemein gehalten, indem der totale Differentialquotient einer Größe beliebiger Ordnung nach einer anderen ebenfalls beliebiger Ordnung untersucht wird. Es zeigt sich dabei, daß zu jeder Ordnung Differentialoperatorkerne gehören, von denen das D der gewöhnlichen Differentialrechnung und das ∇ der Vektoranalysis nur Spezialfälle für die nullte bzw. erste Ordnung sind. Die Ordnung des Differentialquotienten läßt sich stets von vornherein genau angeben. Aus einer vorläufigen Anwendung des Operators $\nabla \llcorner$ auf ein Vektorfeld ergibt sich die mnemotechnische Bedeutung der für die Grundmultiplikationen gewählten Zeichen. Die Wirkung von Differentialoperatoren auf Summen oder Produkte wird erst allgemein für beliebige Ordnungen behandelt. Dabei ergibt sich eine Regel für die Umformung, und der Begriff der abgeleiteten Differentialoperatoren, die zur Umgehung von Multiplikationen höherer Ordnung Verwendung finden können. Die allgemeinen Prinzipien werden angewendet auf Produkte von Skalaren, Vektoren und Affinoren. Es folgen die Operatoren zweiten Grades, deren Behandlung sich in der Affinoranalysis vollkommen symmetrisch gestaltet. Die Flächen und Raumintegrale werden wiederum zunächst für Größen

beliebiger Ordnung angegeben, wobei sich eine koordinatenfreie Definition von ∇ ergibt. Hier schließt sich eine Behandlung der Skalar-, Vektor- und Affinorfelder an. Bei den Vektorfeldern zeigt sich namentlich die Überlegenheit des Minuszeichens in den Regeln der Vektoranalysis, da nur dieses eine vollkommen symmetrische Formulierung ermöglicht. Zum Schluß wird eine Übersicht gegeben über die Behandlung der Differentialoperatoren in anderen Systemen.

Im sechsten Kapitel wird an einigen Beispielen gezeigt, wie sich die Affinoranalysis in der Praxis handhaben läßt. Dieselben beziehen sich auf die Bewegung starrer Körper, die Elastizitätslehre des allgemeinen isotropen Mediums, die elektromagnetischen Erscheinungen, und die für die Elektrotechnik wichtige Vektordarstellung periodischer Erscheinungen. Der praktische Nutzen der Affinoranalysis zeigt sich insbesondere bei der Anwendung auf die Elastizitätslehre, da sie es ermöglicht, jede Erscheinung schnell und übersichtlich in ihre wesentlichen Komponenten zu zerlegen.

E. Waelsch[1]) gelangt zu neuen distributiven Verknüpfungen von Vektoren, indem er jedem Vektor eine binäre quadratische Form zuordnet, deren drei Koeffizienten bestimmte komplexe lineare Funktionen der Koordinaten sind, die eine geometrische Deutung finden, wenn der Vektor in bezug auf den imaginären Kugelkreis bestimmt wird. Einer binären Form zwei-n^{ter} Ordnung, die sich in n je einen reellen Vektor bestimmende Vektoren zerlegen läßt, ordnet er eine geometrische Größe zu, die durch n gleichlange Vektoren und durch eine Zahl, also durch $2n+1$ Bestimmungszahlen gegeben wird, und n-Bein genannt werden kann. Die Summe zweier n-Beine wird definiert als das n-Bein der Summe der zugehörigen Formen. Die Produkte eines n-Beins mit einem m-Bein ergeben sich, indem man zu jeder aus der Invariantentheorie bekannten „Überschiebung" der zugeordneten Formen das zugeordnete Vielbein bestimmt, in der Tat sind die so entstehenden Verknüpfungen distributiv in bezug auf die Addition. Nun entsprechen den n-Beinen Waelschs die von uns als reine geometrische Größen n^{ter} Ordnung definierten Größen, und es sind die Waelschschen Produkte bis auf Zahlenfaktoren die Bestandteile nullter, erster usw. Ordnung der totalen Produkte einer unserer Analysen bis zu beliebiger Ordnung. Man könnte seine Multiplikationen also etwa als Elementarmultiplikationen bezeichnen. Zu einer wirklichen Analysis kommt nun aber Waelsch nicht, er stellt sich nur die Aufgabe, überhaupt zu neuen Multiplikationen und höheren Größen zu gelangen, und seine Elementarmultiplikationen werden dann auch unabhängig voneinander auf-

---

1) 03. 5; 04. 8, 9, 10; 05. 9; 06. 4, 5; 07. 8, 9.

gefunden und bleiben lose nebeneinander stehen, ohne daß Grund- und Hauptmultiplikationen entstehen[1]), und ohne daß Rechnungsregeln zur Umformung von Produkten, die die eigentliche Rechnung erst ermöglichen würden, gebildet werden.[2]) Dagegen entsteht auf dem von uns befolgtem Wege, also bei Anwendung des Kleinschen Klassifizierungsprinzips zur Systembildung, jedes System beliebiger Ordnung sofort vollständig, sämtliche Grund-, Haupt- und abgeleiteten Multiplikationen enthaltend. Übrigens ist die Waelschsche Methode in hohem Maße interessant, da sie die Beziehungen der höheren Zahlensysteme zu den Theoremen der Invariantentheorie der binären Formen und zur Theorie der Kugelfunktionen[3]) hervortreten läßt, und so erlaubt, diese Teilgebiete von einem zentralen Gesichtspunkte zu betrachten. Ein ganz besonderes Interesse gewinnt sie noch dadurch, daß sie für die Analysen höherer Ordnung eine Arbeit von Burkhardt ergänzt. H. Burkhardt hat 1893 gezeigt[4]), daß alle Skalare und Vektoren, die, bzw. deren Komponenten, rationale ganze Funktionen der Komponenten beliebig vieler gegebener Vektoren und ihrer Differentialquotienten nach den Koordinaten sind, sich stets vermittels der beiden Teile des Quaternionprodukts aus den gegebenen Vektoren und ∇ ableiten lassen. Diese beiden Teile genügen also vollständig zur Darstellung sämtlicher ganzer rationaler Vektorfunktionen nullter und erster Ordnung. Wie Burkhardt sehr richtig bemerkt, ist die Bedeutung des Quaternionprodukts von diesem Umstand wesentlich abhängig. Wo es sich nun in diesem Buche herausstellt, daß die Multiplikationen $\cdot$ und $\times$ die beiden ersten, zur nullten und ersten Ordnung gehörigen Repräsentanten einer Reihe von Multiplikationen sind, von denen jede einer ganz bestimmten Ordnung angehört, da kann man die Frage stellen, ob nun auch jede beliebige Größe höherer Ordnung, deren Komponenten rationale ganze Funktionen der Komponenten gegebener Vektoren und ihrer Differentialquotienten nach den Koordinaten

---

1) Die Multiplikation χ (vgl. S. 73) kennt Waelsch z. B. nicht, dieselbe erscheint bei ihm (bis auf Zahlenfaktoren) als $\dot{0}$, nullte Überschiebung, bei zwei Vektoren, aber als $\dot{2}$, zweite Überschiebung, bei einem Vektor und einem Deviator und als $\dot{4}$, vierte Überschiebung, bei zwei Deviatoren, 06. 5 S. 249 und 255.

2) Für eine Ausnahme siehe jedoch z. B. 06. 5 S. 256 Gl. (17), gleichbedeutend mit unserer Gl. (177).

3) Die Beziehung zu den Kugelfunktionen beruht auf der Tatsache, daß der Skalarteil des Produktes einer festen und einer veränderlichen geometrischen Größe n^{ter} Ordnung, von denen letztere das $n$fache Produkt eines Vektors mit sich selbst ist, eine Kugelfunktion darstellt. In der Tat ist z. B.

$$\nabla^{2}\cdot\{(\mathbf{a} \chi \mathbf{b})\cdot(\mathbf{x} \chi \mathbf{x})\} = 0$$

(vgl. (197) S. 105).

4) 93. 8.

sind, vermittels der Multiplikationen ·, ×, X usw. aus den gegebenen Vektoren und ∇ abgeleitet werden kann. Die Beantwortung dieser Frage, und zwar in bejahendem Sinne, ist nun für die oben erwähnten Elementarmultiplikationen in der Waelschschen Arbeit enthalten, sie ergibt sich als eine unmittelbare Anwendung des Gordanschen Fundamentalsatzes der binären Invariantentheorie.[1]) Implizite ergibt sich durch diese Untersuchungen also auch, daß die von uns abgeleiteten Analysen der geometrischen Größen zweiter, dritter usw. Ordnung mit 9, 16 usw. Einheiten auch invariantentheoretisch in genau derselben Beziehung stehen zu den geometrischen Größen bis zur zweiten, dritten usw. Ordnung, wie die Vektoranalysis zu den geometrischen Größen bis zur ersten Ordnung.

Es mag noch eines hervorgehoben werden. Da es sich in diesem Buche in erster Linie darum handelte, darzutun, wie mit der Zugrundelegung der Kleinschen Prinzipien bei der Bildung von Zahlensystemen geometrischer Größen, der Grund des Streites zwischen den verschiedenen Schulen endgültig aufgehoben ist, und die Methode anzugeben, wie zu jeder beliebigen Klasse von geometrischen Größen die zugehörigen Zahlensysteme gefunden werden können, eine Methode, die dann für die Größen bis zur zweiten Ordnung näher ausgearbeitet wurde, hat sich das Ganze durchaus anders gestaltet, als wenn es sich nur darum gehandelt hätte, dem interessierten Physiker oder Techniker schnell eben nur die Rechnungsregeln der Affinoranalysis zum praktischen Gebrauch beizubringen. Um nun aber auch den Kategorien von Lesern gerecht zu werden, denen es nur auf die praktische Verwendung der Analysis zweiter Ordnung ankommt, ist in einem wenige Seiten zählenden Anhang soviel von den Rechnungsregeln mit etwas erläuterndem Text zusammengestellt, daß der Leser dieses Anhangs z. B. dem Verlauf der mathematischen Deduktionen bei den Anwendungen im sechsten Kapitel wenigstens zu folgen vermag, und so imstande ist zu beurteilen, ob die Affinoranalysis für sein Spezialgebiet nützlich sein kann, und ein näheres Studium derselben für ihn daher lohnend ist.

---

1) 06. 5 S. 251.

Erstes Kapitel.

Die assoziativen Zahlensysteme und ihre Beziehungen zu den geometrischen Größen bis zur ersten Ordnung.

Allgemeines. Die höheren Zahlensysteme, die hier besprochen werden sollen, lassen sich folgendermaßen definieren[1]):

n Elemente $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ unterliegen einer eindeutigen, kommutativen und assoziativen Verknüpfungsweise, $+$, Addition, mit eindeutiger Umkehrung, $-$, Subtraktion.[2]) Unter Multiplikation werde eine übrigens beliebige Verknüpfungsweise verstanden, die in bezug auf die Addition, und also auch in bezug auf die Subtraktion nach beiden Seiten distributiv ist. Die Multiplikation von gewöhnlichen reellen oder komplexen Zahlen mit den Elementen $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ ist kommutativ und assoziativ, sie wird angedeutet durch einfaches Nebeneinanderschreiben. Kombinationen dieser Multiplikation mit derjenigen von gewöhnlichen Zahlen, oder mit irgendeiner Multiplikation von Elementen, sind assoziativ. Es gilt die Identität

$$\mathfrak{e}_i + \mathfrak{e}_i + \mathfrak{e}_i + \cdots m\text{-mal} = m\mathfrak{e}_i \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Unter einer Zahl $\mathfrak{a}$ des Systems verstehen wir die Kombination:

$$\mathfrak{a} = \sum_i^{1,\ldots,n} a_i e_i = \sum_i^{1,\ldots,n} \mathfrak{a}_i, \tag{2}$$

wo die a gewöhnliche reelle oder komplexe Zahlen sind. Die Elemente $\mathfrak{e}$ heißen die Einheiten des Systems.

Wenn

$$\mathfrak{a} = 0,$$

so ist:

$$a_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

d. h. die Einheiten des Systems sind linear unabhängig.

---

1) Für eine vollständige Definition siehe die Arbeit des Verfassers „Zur Klassifizierung der assoziativen Zahlensysteme", Math. Ann. 1914 (fernerhin zitiert 14. 1), S. $x + 2$ ($x + 1$ = Anfangsseite des Artikels). Für Bemerkungen zu dieser Art Definitionen überhaupt siehe ebenda.

2) Graßmann 44. 1, S. 7, Whitehead 98. 1, S. 30.

Alle Multiplikationen höherer Zahlen führen wiederauf eine Zahl des Systems zurück. Dazu genügt, daß

$$(3)\qquad \mathfrak{e}_i \multimap \mathfrak{e}_j = \sum_k^{1,\ldots,n} \gamma_{ijk}\,\mathfrak{e}_k,\ ^{1)} \qquad i,j = 1,\ldots,n,$$

wo die γ gewöhnliche Zahlen sind. Das Multiplikationszeichen werde, wo Zweideutigkeit ausgeschlossen ist, unterdrückt. Die Multiplikation ist vollständig gegeben durch die n^3 Zahlen γ.

Ein System wird dargestellt durch seine Multiplikationstabelle, z. B.

(4)

↗	$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{e}_2$	$\mathfrak{e}_3$	$\mathfrak{e}_4$
$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{e}_2$	0	0
$\mathfrak{e}_2$	0	0	$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{e}_2$
$\mathfrak{e}_3$	$\mathfrak{e}_3$	$\mathfrak{e}_4$	0	0
$\mathfrak{e}_4$	0	0	$\mathfrak{e}_3$	$\mathfrak{e}_4$

Der Pfeil, der die Richtung der Multiplikation angibt, und die Randangaben werden, wo Undeutlichkeit ausgeschlossen ist, fortgelassen.

Führt man statt der n vorhandenen Einheiten n andere linear unabhängige Zahlen des Systems als Einheiten ein, so ändern sich im allgemeinen die Zahlen γ, und das System erscheint in anderer Gestalt, es bleibt aber dasselbe System. Wir nennen nun zwei Systeme:

gleich und gestaltgleich, wenn sie durch gleiche Tabellen, die sich auf dieselben Einheiten beziehen, gegeben sind,

gleich, wenn das eine System durch Einführung neuer Einheiten dem anderen gleich und gestaltgleich gemacht werden kann, z. B. das System (4) und:

(5)

↗	$\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{i}_2$	$\mathfrak{i}_3$	$\mathfrak{m}$
$\mathfrak{i}_1$	$-\mathfrak{m}$	$\mathfrak{i}_3$	$-\mathfrak{i}_2$	$\mathfrak{i}_1$
$\mathfrak{i}_2$	$-\mathfrak{i}_3$	$-\mathfrak{m}$	$\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{i}_2$
$\mathfrak{i}_3$	$\mathfrak{i}_2$	$-\mathfrak{i}_1$	$-\mathfrak{m}$	$\mathfrak{i}_3$
$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{i}_2$	$\mathfrak{i}_3$	$\mathfrak{m}$

vermöge der Substitution:

---

1) Als allgemeines, eine Multiplikation andeutendes Zeichen wollen wir $\multimap$ verwenden. Die Asymmetrie dieses Zeichens in bezug auf eine vertikale Mittellinie entspricht der Nichtkommutativität der Multiplikation und ermöglicht die Umkehrung:

$$\mathfrak{a} \multimap \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \multimapinv \mathfrak{a}.$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} m &= e_1 + e_4, \\ i_1 &= (e_1 - e_4)\sqrt{-1}, \\ i_2 &= (e_2 - e_3), \\ i_3 &= (e_2 + e_3)\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

isomorph oder **formgleich**, wenn zwar die beiden Tabellen dieselbe Form haben, sich aber auf andere Zahlen als Einheiten beziehen, z. B.:

(7)

↗	e_1	e_2
e_1	e_1	0
e_2	0	e_2

↗	e_2	e_3
e_2	e_2	0
e_3	0	e_3

äquivalent, wenn das eine System durch Einführung neuer Einheiten dem anderen formgleich gemacht werden kann. Liegt ein System in zwei verschiedenen aber formgleichen Gestalten vor, so heißt dasselbe in diesen Gestalten **selbstisomorph**, z. B. das durch (4) angegebene System und:

(8)

↗	e_1'	e_2'	e_3'	e_4'
e_1'	e_1'	e_2'	0	0
e_2'	0	0	e_1'	e_2'
e_3'	e_3'	e_4'	0	0
e_4'	0	0	e_3'	e_4'

z. B. vermöge der Substitution:

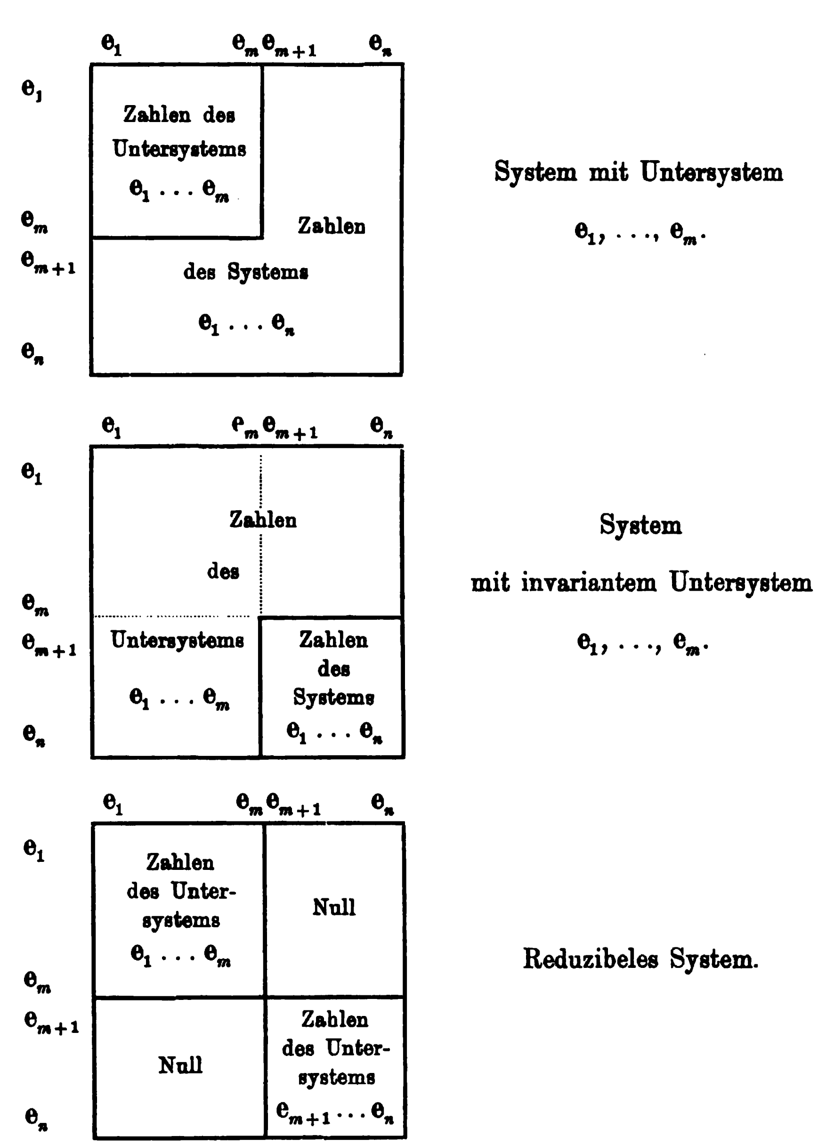
$$(9)\qquad \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2, \\ e_2' = e_2, \\ e_3' = -e_1 - e_2 + e_3 + e_4, \\ e_4' = e_4 - e_2. \end{cases}$$

Alle Zahlen, die aus m voneinander linear unabhängigen Zahlen des Systems linear abgeleitet werden können, bilden zusammen ein **Untergebiet**.[1]) Führen die Multiplikationen dieser Zahlen unter sich wieder in das Untergebiet zurück, so bilden sie ein System für sich, ein **Untersystem des Hauptsystems**. Führen auch die Multiplikationen der Zahlen eines Untersystems mit allen anderen Zahlen des Systems in das Untersystem zurück, so heißt dasselbe ein **invariantes Untersystem**. Kann ein System in zwei invariante Untersysteme zerlegt werden, die keine Zahlen gemein haben und zusammen alle Zahlen des Systems be-

---

1) Graßmann 62. 1, S. 16, Maclagan Wedderburn 07. 1, S. 82, Whitehead 98. 1, S. 123.

stimmen, so ist das Produkt einer Zahl des ersten mit einer Zahl des zweiten Untersystems stets null, und das Hauptsystem heißt reduzibel. Durch geeignete Wahl der Einheiten läßt sich ein System mit Untersystem, bzw. ein System mit invariantem Untersystem, bzw. ein reduzibeles System in folgende Form bringen:



Sind zwei Systeme $e_1, \ldots, e_n$ und $f_1, \ldots, f_n$ gegeben, und besteht zwischen den e und den f eine kommutative Multiplikation, die in Kom-

binationen mit den Multiplikationen der Systeme assoziativ ist, so sind die nn' Kombinationen

$$(10) \qquad \mathfrak{e}_i\mathfrak{f}_j = \mathfrak{f}_j\mathfrak{e}_i \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n' \end{matrix}$$

(Multiplikationszeichen unterdrückt) aufzufassen als Einheiten eines Systems mit nn' Einheiten. Dieses System heißt das Produktsystem[1]) der Systeme in $\mathfrak{e}$ und in $\mathfrak{f}$, z. B.:

(11)

	$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{e}_2$
$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{e}_1$	0
$\mathfrak{e}_2$	0	$\mathfrak{e}_2$

	$\mathfrak{f}_1$	$\mathfrak{f}_2$
$\mathfrak{f}_1$	$\mathfrak{f}_1$	0
$\mathfrak{f}_2$	0	$\mathfrak{f}_2$

(12)

	$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{g}_3$	$\mathfrak{g}_4$
$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_1$	0	0	0
$\mathfrak{g}_2$	0	$\mathfrak{g}_2$	0	0
$\mathfrak{g}_3$	0	0	$\mathfrak{g}_3$	0
$\mathfrak{g}_4$	0	0	0	$\mathfrak{g}_4$

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1, \\ \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_2, \\ \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{e}_2\mathfrak{f}_1, \\ \mathfrak{g}_4 = \mathfrak{e}_2\mathfrak{f}_2. \end{cases}$$

Die assoziativen Systeme und der Modulus. In einem System können im allgemeinen Produkte null werden, ohne daß einer der Faktoren null wird. Faktoren eines solchen Produktes heißen Teiler der Null. Es kann bewiesen werden, daß es, wenn in einem assoziativen System nicht alle Zahlen Teiler der Null sind, eine einzige Zahl $\mathfrak{m}$ gibt, die bei Multiplikation mit den anderen Zahlen dasselbe Resultat gibt, wie die gewöhnliche Zahl 1 bei der multiplikativen Verknüpfung von gewöhnlichen und höheren Zahlen.[2]) Stellen wir die Multiplikation von höheren Zahlen mit gewöhnlichen Zahlen einen Augenblick durch $\odot$ dar, so ist also der Operator:

$$\mathfrak{m} \multimap = \multimap \mathfrak{m}$$

in Wirkung gleich mit:

$$1 \odot = \odot 1.$$

Es ist aber hervorzuheben, daß keineswegs ohne weiteres folgt, daß $\mathfrak{m}$

1) Die Multiplikation der Systeme wurde zuerst von Clifford 1878 (78. 1) für ursprüngliche Systeme angegeben, und von Scheffers 1891 (91. 1, S. 323) allgemein formuliert und in Beziehung gesetzt zur Zusammenstellung der Teilsysteme eines reduzibelen Systems, die Addition genannt wurde. In der Tat besteht dann das distributive Gesetz. Addition und Multiplikation der Systeme haben namentlich dadurch Bedeutung erlangt, daß Maclagan Wedderburn 1907 (07. 1) auf diese Grundlagen seinen Kalkül der Systeme aufgebaut hat (14. 1, S. $x + 40$).

2) Vgl. z. B. G. W. Scheffers 91. 1, S. 296, und 14. 1, S. $x + 11$.

mit 1 identisch ist, da die multiplikative Verknüpfungsweise in beiden Fällen eine ganz andere ist.

Die ursprünglichen Systeme und ihre Normalformen. Ist ein Zahlensystem assoziativ, so genügen die n^3 Konstanten γ den n^4 Gleichungen:

$$(13) \qquad \sum_1^n s(\gamma_{iks}\gamma_{slt} - \gamma_{kls}\gamma_{ist}) = 0$$
$$i, k, l, t = 1, \ldots, n.$$

Die Lösung dieser Gleichungen, die zu allen möglichen assoziativen Systemen führen würde, ist schon bei $n = 3$ mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden. Es sind daher andere Methoden zur Klassifizierung ausgebildet worden. Auf diese Methoden selbst sei hier nicht näher eingegangen, es sei nur gestattet, eins ihrer wichtigsten Resultate anzuwenden. Es läßt sich nämlich zeigen[1]), daß jedes assoziative Zahlensystem mit n Einheiten Untersystem ist des Systems:

$$(14) \qquad \begin{cases} e_{ij} & i, j = 1, \ldots, n', \\ e_{ij}\, e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{wenn } j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \\ \text{Ordnung des Systems} = n' \leqq n.^{2)} \end{cases}$$

Die durch diese Formeln angegebenen Systeme, die also nur mit 4, 9, 16 usw. Einheiten auftreten, heißen nach Molien ursprüngliche Systeme. Das ursprüngliche System zweiter Ordnung, die Hamiltonschen Quaternionen, ist durch die Tabelle (4) gegeben, wo

$$e_1 = e_{11}, \quad e_2 = e_{12}, \quad e_3 = e_{21}, \quad e_4 = e_{22}.$$

Eine ähnliche Form für das System dritter Ordnung, die Nonionen von Sylvester, erhält man, indem man setzt:

$$(15) \qquad \begin{array}{lll} e_1 = e_{11}, & e_4 = e_{21}, & e_7 = e_{31}, \\ e_2 = e_{12}, & e_5 = e_{22}, & e_8 = e_{32}, \\ e_3 = e_{13}, & e_6 = e_{23}, & e_9 = e_{33}; \end{array}$$

die Tabelle dieses Systems erhält dann die Form:

---

1) Vgl. 14. 1, S. $x + 50$.
2) C. S. Peirce 81. 2.

(16)

↗	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
e_1	e_1	e_2	e_3	0	0	0	0	0	0
e_2	0	0	0	e_1	e_2	e_3	0	0	0
e_3	0	0	0	0	0	0	e_1	e_2	e_3
e_4	e_4	e_5	e_6	0	0	0	0	0	0
e_5	0	0	0	e_4	e_5	e_6	0	0	0
e_6	0	0	0	0	0	0	e_4	e_5	e_6
e_7	e_7	e_8	e_9	0	0	0	0	0	0
e_8	0	0	0	e_7	e_8	e_9	0	0	0
e_9	0	0	0	0	0	0	e_7	e_8	e_9

Die ursprünglichen Systeme sind die einzigen assoziativen, die keine invarianten Untersysteme besitzen.[1]) Da offenbar jedes ursprüngliche System irgendwelcher Ordnung Untersystem aller ursprünglichen Systeme höherer Ordnung ist, kann man sagen, es gäbe überhaupt nur ein assoziatives System, das ursprüngliche beliebig hoher Ordnung, von welchem alle möglichen Systeme Untersysteme sind.

Liegt ein ursprüngliches System in der Form e_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, vor, so bilden die n Einheiten e_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, die ihren eigenen Quadraten gleich und deren Produkte unter sich sämtlich null sind, ein Untersystem, das den Namen Hauptreihe trägt. Es läßt sich zeigen, daß sich in einem ursprünglichen System n^{ter} Ordnung beliebig viele Sätze solcher Einheiten finden lassen, die aber nie mehr als n Einheiten enthalten können.[2]) Es gibt also in einem ursprünglichen System beliebig viele Hauptreihen. Die anderen Einheiten lassen sich aber stets so dazu wählen, daß das System den Multiplikationsregeln (14) genügt. In bezug auf zwei beliebige Hauptreihen läßt sich das System also stets so ordnen, daß es in seinen beiden Gestalten selbstisomorph ist. (Vgl. S. 33).[3])

Die durch die Gleichungen (14) angegebene Form eines ursprünglichen Systems und einer (für sich als System betrachteten) Hauptreihe nennen wir die algebraische Normalform. Wir bezeichnen dieselbe mit dem Symbol

$$U_{an} \quad \text{bzw.} \quad H_{an},$$

1) Vgl. 14. 1, S. $x + 25$.

2) 14. 1, S. $x + 27$ ff.

3) 14. 1, S. $x + 28$. Diese Eigenschaft, die auch für nichtursprüngliche Systeme gilt, findet ihren Ausdruck in dem Satze der durchgehenden Selbstisomorphie der Systeme (14. 1, S. $x + 34$) und ist für die Klassifizierung der Systeme besonders wichtig.

wo n die Ordnung des Systems anzeigt. Offenbar gilt für die Multiplikation dieser Systeme:

$$\begin{cases} U_{am} U_{an} = U_{a(m+n)} \\ H_{am} H_{an} = H_{a(m+n)} . \end{cases}$$

Die durch Tabelle (5) angegebene Form eines Systems zweiter Ordnung nennen wir die geometrische Normalform erster Ordnung. Das Symbol für dieselbe sei

$$U_{g2} .$$

Unter geometrischer Normalform erster Ordnung einer Hauptreihe n^{ter} Ordnung wollen wir die Form verstehen:

$$(17) \qquad \mathrm{e}_i = \mathrm{e}_1{}^i \quad \mathrm{e}_n = \mathrm{m} \qquad i_n = 1, \ldots, n,$$

oder tabellarisch, z. B. für $n = 5$:

(18)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_1
e_2	e_3	e_4	e_5	e_1	e_2
e_3	e_4	e_5	e_1	e_2	e_3
e_4	e_5	e_1	e_2	e_3	e_4
e_5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5

$e_5 = \mathrm{m}$,

und dieselbe mit H_{gn} bezeichnen. Wie leicht ersichtlich, läßt sich jede Hauptreihe in diese Form bringen. Geometrische Normalformen erster Ordnung lassen sich nur durch komplexe Substitutionen aus den algebraischen herleiten. Die Bedeutung dieser Formen wird sich weiter unten ergeben; dabei werden sich dann gleichzeitig auch solche für ursprüngliche Systeme höherer Ordnung angeben lassen (vgl. S. 72).

Geometrische Deutung der ursprünglichen Systeme und der Hauptreihen. Was nun die geometrische Deutung der assoziativen Zahlensysteme betrifft, so ist es von vornherein deutlich, daß es namentlich erstens die alle andern umfassenden ursprünglichen Systeme, zweitens die allereinfachsten symmetrischen Untersysteme, also die Hauptreihen, und drittens die multiplikativen Kombinationen dieser beiden Systemarten sein werden, die für die allgemeine Theorie in Betracht kommen werden.[1]) Nur müssen wir uns darauf gefaßt machen, daß es, namentlich bei Gebieten höherer Dimensionenzahl, wo die Zahl der Einheiten sehr wächst, für das praktische Rechnen nützlich sein kann, das System zu verkürzen,

---

1) Vgl. 14. 1 S. $x + 63$.

d. h. einen Teil der Einheiten fortzulassen, zuweilen sogar mit Aufhebung des assoziativen Gesetzes. Es mag aber auch für diese im uneigentlichen Sinne nicht-assoziativen Systeme seinen Wert haben, zunächst die Theorie der noch unverkürzten Systeme anzugeben.

Die geometrischen Größen in einem Punkt und ihre Klassifizierung.[1]) Ist in einem Raume von drei Dimensionen ein beliebiger Punkt O gegeben, durch den drei beliebige zueinander rechtwinklige Geraden gehen, jede mit einem Einheitsvektor $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$, so bestimmt jedes Zahlentripel a_1, a_2, a_3 einen Vektor durch O mit den Komponenten

$$a_1 \mathfrak{e}_1, \quad a_2 \mathfrak{e}_2, \quad a_3 \mathfrak{e}_3 .$$

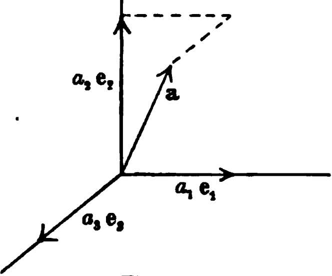


Fig. 1.
Vektor mit Komponenten

Geben wir diesen Vektor an durch:

$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 + a_3 \mathfrak{e}_3 , \tag{19}$$

so ist damit die Bedeutung der Addition von Vektoren festgelegt. a_1, a_2 und a_3 nennen wir orthogonale Bestimmungszahlen des Vektors $\mathfrak{a}$. Es seien jetzt drei beliebige, nicht komplanare Richtungen durch O gegeben, jede mit einem Vektor beliebiger Länge $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$, $\mathfrak{e}_3'$. Man kann dann zunächst $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$, $\mathfrak{e}_3'$ linear homogen in $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ ausdrücken:

$$\text{(20a)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{e}_1' = \alpha_{11} \mathfrak{e}_1 + \alpha_{12} \mathfrak{e}_2 + \alpha_{13} \mathfrak{e}_3 \\ \mathfrak{e}_2' = \alpha_{21} \mathfrak{e}_1 + \alpha_{22} \mathfrak{e}_2 + \alpha_{23} \mathfrak{e}_3 \\ \mathfrak{e}_3' = \alpha_{31} \mathfrak{e}_1 + \alpha_{32} \mathfrak{e}_2 + \alpha_{33} \mathfrak{e}_3 , \end{cases}$$

und auch umgekehrt die $\mathfrak{e}$ in den $\mathfrak{e}'$:

$$\text{(20b)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{e}_1 = \frac{\alpha_{11}'}{\Delta} \mathfrak{e}_1' + \frac{\alpha_{21}'}{\Delta} \mathfrak{e}_2' + \frac{\alpha_{31}'}{\Delta} \mathfrak{e}_3' \\ \mathfrak{e}_2 = \frac{\alpha_{12}'}{\Delta} \mathfrak{e}_1' + \frac{\alpha_{22}'}{\Delta} \mathfrak{e}_2' + \frac{\alpha_{32}'}{\Delta} \mathfrak{e}_3' \\ \mathfrak{e}_3 = \frac{\alpha_{13}'}{\Delta} \mathfrak{e}_1' + \frac{\alpha_{23}'}{\Delta} \mathfrak{e}_2' + \frac{\alpha_{33}'}{\Delta} \mathfrak{e}_3' . \end{cases}$$

Bekanntlich ist α_{ij}' die zu α_{ij} gehörige Unterdeterminante der Determinante

1) Durch den Zusatz „in einem Punkt" beschränken wir uns auf die sogenannten freien Größen, wie linienflüchtige oder freie Vektoren usw., und schließen die sogenannten gebundenen Größen, vgl. z. B. E. Jahnke 05. 4 S. 158, wie Linienteile oder Stäbe, von der Betrachtung aus. (Vgl. S. 60.)

(21)
$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

(Man beachte die Spiegelung an der Diagonale!). Die Umkehrung ist nur möglich, wenn $\Delta \neq 0$. Da aber Δ den Inhalt des Parallelepipeds $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$, $\mathfrak{e}_3'$ gemessen mit dem Würfel $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ als Einheit angibt, ist der Fall $\Delta = 0$ hier den Voraussetzungen nach ausgeschlossen. Der Vektor $\mathfrak{a}$ kann jetzt auf das neue Achsensystem bezogen werden, und seine Bestimmungszahlen unterliegen dabei der Transformation:

(22a)
$$\begin{cases} a_1' = \frac{\alpha_{11}'}{\Delta} a_1 + \frac{\alpha_{12}'}{\Delta} a_2 + \frac{\alpha_{13}'}{\Delta} a_3 \\ a_2' = \frac{\alpha_{21}'}{\Delta} a_1 + \frac{\alpha_{22}'}{\Delta} a_2 + \frac{\alpha_{23}'}{\Delta} a_3 \\ a_3' = \frac{\alpha_{31}'}{\Delta} a_1 + \frac{\alpha_{32}'}{\Delta} a_2 + \frac{\alpha_{33}'}{\Delta} a_3, \end{cases}$$

oder umgekehrt:

(22b)
$$\begin{cases} a_1 = \alpha_{11} a_1' + \alpha_{21} a_2' + \alpha_{31} a_3' \\ a_2 = \alpha_{12} a_1' + \alpha_{22} a_2' + \alpha_{32} a_3' \\ a_3 = \alpha_{13} a_1' + \alpha_{23} a_2' + \alpha_{33} a_3'. \end{cases}$$

Die Transformationen (20) und (22) stehen in einem eigentümlichen Zusammenhange, ihre Parameter sind dieselben bis auf Spiegelung an der Diagonale, und die Indizes, die die neue Variabelnreihe von der alten unterscheiden, haben ihre Stellung gewechselt. Solche Transformationen nennt man zueinander kontragredient, sodaß wir sagen können, daß sich bei einer Transformation der Grundeinheiten die Bestimmungszahlen eines beliebigen Vektors kontragredient zu den Grundeinheiten transformieren.

Wir haben die Gleichungen (22) gedeutet als die Transformationen der Koordinaten eines festen Vektors bei Änderung des Achsensystems. Wir können dieselben aber auch deuten als eine homogene lineare oder affine[1]) Transformation des Raumes, beurteilt von dem festen Achsensystem $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ aus. Jeder Vektor mit den Bestimmungszahlen a_1, a_2, a_3 geht dabei über in einen Vektor a_1', a_2', a_3'. Eine jede affine Transformation des Raumes, für die $\Delta \neq 0$, ergibt also für die Bestimmungszahlen eines beliebigen Vektors dasselbe Resultat, wie die zu dieser kontragrediente Transformation der Einheitsvektoren. Nach dem jeweils vor-

1) Da wir nur die Größen in einem Punkt betrachten (vgl. S. 19), und demnach keine anderen als homogene Transformationen zuzulassen brauchen, werden wir unter affinen Transformationen stets stillschweigend nur homogene affine Transformationen verstehen.

liegenden Fall kann man die eine oder die andere Deutung der Gleichungen bevorzugen.

Die Bestimmungszahlen eines Vektors **a** für irgend ein Achsensystem lassen sich nach (22) angeben als Funktionen von den Bestimmungszahlen für das erstvorhandene Achsensystem und von neun Parametern, die die Richtungen des neuen Achsensystems inbezug auf das alte und die Änderung der drei Maßeinheiten angeben. Der Vektor **a** kann auch durch drei andere unabhängige Zahlen gegeben werden, z. B. $a_2 + a_3$, $a_3 + a_1$, $a_1 + a_2$; solche andere Bestimmungszahlen transformieren sich dann offenbar im allgemeinen in anderer Weise als a_1, a_2, a_3. Gibt man insbesondere **a** an durch die drei Zahlen

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = \frac{1}{a_2}, \quad b_3 = \frac{1}{a_3},$$

so transformieren sich diese, wie leicht darzutun ist, kontragredient zu den a.

Aus der Invariantentheorie ist bekannt, daß die Summe der Produkte der korrespondierenden Variabeln zweier Sätze variabeler Zahlen dann und nur dann bei einer bestimmten Transformation invariant ist, wenn die beiden Sätze sich bei dieser Transformation zueinander kontragredient transformieren. In der Tat ist z. B.:

$$a_1 \frac{1}{a_1} + a_2 \frac{1}{a_2} + a_3 \frac{1}{a_3} = 3$$

invariant. Dies gilt auch noch, wenn einer der Variabelensätze aus Vektoren besteht. In der Tat, wenn sich die Einheitsvektoren nach (20) transformieren, und demzufolge die Bestimmungszahlen eines beliebigen Vektors a_1, a_2, a_3 nach (22), also kontragredient zu den Einheitsvektoren, so bleibt

$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 + a_3 \mathfrak{e}_3 = a_1' \mathfrak{e}_1' + a_2' \mathfrak{e}_2' + a_3' \mathfrak{e}_3'$$

bei dieser Transformation invariant, während umgekehrt die Kontragredienz aus dieser Invarianz abzuleiten ist.

Als zweites Beispiel einer geometrischen Größe in einem Punkte wählen wir einen Teil einer Ebene durch O, dem ein bestimmter Drehungssinn zugeordnet ist, in derselben Weise, wie ein Vektor einen bestimmten Richtungssinn hat. Eine solche Größe, die man Bivektor nennt, ließe sich in bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem in O z. B. angeben durch die Verhältnisse A_1, A_2, A_3 seiner drei Projektionen auf die drei Koordinatenebenen zu drei in diesen Ebenen gewählten Flächeneinheiten $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$:

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{E}_1 + A_2 \mathbf{E}_2 + A_3 \mathbf{E}_3. \tag{23}$$

Wählen wir für diese Einheiten die durch $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{e}_3$ und $\mathfrak{e}_1$ bzw. $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ bestimmten Quadrate, und nehmen wir einen beliebigen Vektor

$$\mathfrak{b} = b_1 \mathfrak{e}_1 + b_2 \mathfrak{e}_2 + b_3 \mathfrak{e}_3 ,$$

so stellt

$$A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3$$

den Inhalt des durch den Vektor $\mathfrak{b}$ und den Bivektor A bestimmten Parallelepipeds dar. Dieser Inhalt ist aber bei allen speziellen affinen Transformationen, das sind die, bei denen $\Delta = 1$ ist, invariant. Beschränken wir die Betrachtung also nur auf diese Transformationen, so transformieren sich die Bestimmungszahlen A_1, A_2, A_3 eines Bivektors kontragredient zu denen eines Vektors b_1, b_2, b_3, und kogredient zu (d. h. in derselben Weise wie) $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{b_2}$, $\frac{1}{b_3}$.

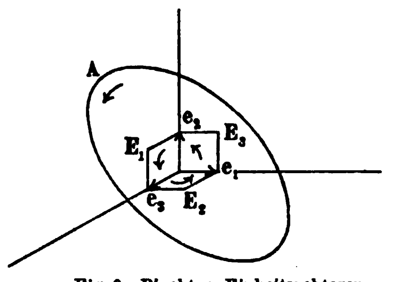


Fig. 2. Bivektor, Einheitsvektoren und Einheitsbivektoren.

Unter den verschiedenen möglichen affinen Transformationen sind die orthogonalen, das sind diejenigen, die, auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit gleichlangen Einheiten bezogen, eine Drehung (eventuell mit Spiegelung) darstellen, dadurch ausgezeichnet, daß sie zu sich selbst kontragredient sind. Aus:

$$(24a)\qquad \begin{cases} a_1' = \alpha_{11} a_1 + \alpha_{12} a_2 + \alpha_{13} a_3 \\ a_1' = \alpha_{21} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \alpha_{23} a_3 \\ a_3' = \alpha_{31} a_1 + \alpha_{32} a_2 + \alpha_{33} a_3 \end{cases}$$

folgt also für eine orthogonale Transformation:

$$(24b)\qquad \begin{cases} a_1 = \alpha_{11} a_1' + \alpha_{21} a_2' + \alpha_{31} a_3' \\ a_2 = \alpha_{12} a_1' + \alpha_{22} a_2' + \alpha_{32} a_3' \\ a_3 = \alpha_{13} a_1' + \alpha_{23} a_2' + \alpha_{33} a_3' . \end{cases}$$

Beide Tabellen lassen sich zu einer einzigen zusammenziehen:

$$(24)\qquad \begin{cases} \qquad\;\; a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\ \qquad\;\; \| \quad\; \| \quad\; \| \\ a_1' = \alpha_{11} \; \alpha_{12} \; \alpha_{13} \\ a_2' = \alpha_{21} \; \alpha_{22} \; \alpha_{23} \\ a_3' = \alpha_{31} \; \alpha_{32} \; \alpha_{33} . \end{cases}$$

Betrachten wir die orthogonalen Bestimmungszahlen eines Vektors und eines Bivektors nicht wie vorher bei den Transformationen der speziellen affinen Gruppe, sondern nur bei ihrer Untergruppe, der Gruppe der

Drehungen — das sind orthogonale Transformationen mit $\Delta = 1$, also ohne Spiegelung — so transformieren sie sich in derselben Weise, da der Unterschied zwischen Kogredienz und Kontragredienz hier verschwindet.

Die Betrachtung läßt sich leicht auf mehrere Dimensionen ausdehnen. Nennen wir die durch einen Punkt in einem n dimensionalen Raume gehenden gerichteten Strecken Monovektoren oder kurz Vektoren, die mit Drehsinn ausgestatteten Ebenenteile Bivektoren, usw., so transformieren sich offenbar die $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\ldots p}$ Bestimmungszahlen eines p Vektors kontragredient zu denen eines $(n-p)$ Vektors bei speziellen affinen Transformationen, und kogredient sowohl als kontragredient bei speziellen orthogonalen Transformationen.

Sind zwei Vektoren **a** und **b** gegeben, so ist ein Satz Bestimmungszahlen des durch **a** und **b** bestimmten als Bivektor aufgefaßten Parallelogramms für jedes Bezugssystem gegeben durch:

$$C_1 = a_2 b_3 - a_3 b_1 \quad \text{cycl.}$$

Diese Zahlen sind also Funktionen der Bestimmungszahlen zweier Vektoren, die die Eigentümlichkeit besitzen, daß sie bei Änderung des Achsensystems in andere übergehen, die sich ebenso wie die Bestimmungszahlen eines Vektors als Funktionen nur der erstvorhandenen Werte und der Parameter des neuen Achsensystems angeben lassen. Beliebige Funktionen der Bestimmungszahlen von Vektoren haben diese Eigenschaft nicht. Wählt man z. B.:

$$c = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

oder

$$\xi_1 = a_2 C_3 - a_3 C_2 \quad \text{cycl.,}$$

wo **a** und **b** Vektoren sind und **C** ein Bivektor, so werden sich diese Zahlen bei beliebiger Änderung des Bezugssystems ja auch in ganz bestimmter Weise transformieren zu:

$$c' = a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3',$$

bzw.

$$\xi_1' = a_2' C_3' - a_3' C_2' \quad \text{cycl.,}$$

es ist aber nicht möglich c' bzw. ξ' als Funktionen nur von c bzw. ξ und von den neun Parametern α anzugeben, denn es bleiben in dem Ausdruck immer noch Bestimmungszahlen a, b und C enthalten. Betrachtet man aber nur Drehungen des Bezugssystems, so transformieren sich a_1, a_2, a_3 zu sich selbst kontragredient und zu C_1, C_2, C_3 kogredient, es ist also c eine Invariante, und ξ_1, ξ_2, ξ_3 transformieren sich wie die Bestimmungszahlen eines Vektors.

Diejenigen Sätze von Zahlen, wo die erwähnte Möglichkeit wohl vorhanden ist, zeichnen sich also den anderen gegenüber besonders aus. Sie sind zwar Funktionen von Bestimmungszahlen von Vektoren, transformieren sich aber bei bestimmten Änderungen des Bezugssystems, wie man sagt, in sich selbst, und wir können sie mit F. Klein[1]) als Bestimmungszahlen selbständiger geometrischer Größen auffassen. Eine geometrische Größe ist also der Inbegriff einer beliebigen aber bestimmten Anzahl von Zahlen, deren jede Funktion der Bestimmungszahlen mehrerer Vektoren ist, die sich aber bei gewissen Änderungen des Bezugssystems in sich transformieren. Ob uns nun ein Satz Bestimmungszahlen als geometrische Größe erscheint oder nicht, liegt nur daran, welche Transformationen des Bezugssystems wir zulassen. Lassen wir z. B. nur Drehungen zu, so bestimmt das Tripel ξ_1, ξ_2, ξ_3 eine Größe ξ, diese Größe hält aber den speziellen affinen Transformationen nicht Stand, man kann sagen, daß sie durch letztere zerstört wird.

An die Kleinsche Definition der geometrischen Größe schließt sich unmittelbar sein Klassifizierungsprinzip. Klein nennt zwei Größen dann und nur dann gleichartig, wenn sich ihre Bestimmungszahlen in derselben Weise transformieren. Nun ist man bei der Anwendung der Kleinschen Prinzipien, wie Klein selbst auch bemerkt[2]), noch frei in der Wahl der Gruppen von Transformationen, die der Betrachtung zugrunde gelegt werden. Klein selbst wählte sowohl für die Definition als zur Klassifizierung der Größen die sogenannte Hauptgruppe, das ist diejenige Gruppe, die sich zusammensetzt aus den Drehungen um den Anfangspunkt, den Parallelverschiebungen und den Ähnlichkeitstransformationen. Da wir uns hier nur mit den geometrischen Größen in einem Punkt befassen, können wir zunächst die Parallelverschiebungen fortlassen. Ferner wollen wir die Ähnlichkeitstransformationen, die ja nur Änderung des Maßstabes bedeuten, nur verwenden zur Bestimmung der Stufe einer Größe, und zunächst von Inversionen absehen. Der Definition von geometrischen Größen sei hier also nur die Gruppe der Drehungen zugrunde gelegt:

Regel I: Unter einer geometrischen Größe verstehen wir für den Zweck dieser Untersuchung den Inbegriff einer bestimmten Anzahl Funktionen von orthogonalen Bestimmungszahlen von Vektoren, die sich bei Drehungen des Bezugssystems in sich transformieren. Wird eine solche Größe durch spezielle affine Transformationen nicht zerstört, so heißt sie Ausdehnungsgröße, im anderen Falle rechte Winkelgröße.

1) 02. 2, 06. 2, S. 420 und 447, 09. 18, S. 50.

2) 02. 2, 06. 2, S. 448.

Indem hier eine wenig umfassende Gruppe gewählt ist, erhalten wir eine möglichst große Anzahl verschiedener geometrischer Größen. Zur Klassifizierung verwenden wir dann zunächst für die grobe Unterscheidung ebenfalls die Gruppe der Drehungen:

Regel II: Eine geometrische Größe ist von der p^{ten} Ordnung, wenn ihre $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ orthogonalen Bestimmungszahlen so gewählt werden können, daß sie sich transformieren wie die $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ p-faktorigen Produkte der orthogonalen Bestimmungszahlen eines Vektors:

$$a_1^p,\; a_2^p,\; a_3^p,\; a_1^{p-1}a_2,\; \text{usw.},$$

und wenn sie überdies keine Größe niederer Ordnung enthält. Eine geometrische Größe enthält eine andere niederer Ordnung, wenn sich lineare Funktionen ihrer orthogonalen Bestimmungszahlen angeben lassen, die von null verschieden und Bestimmungszahlen einer Größe niederer Ordnung sind.[1])

Zu den Größen erster Ordnung gehören Vektoren, Bivektoren, sowie Größen wie $\mathfrak{z}$ (S. 24). Größen, die durch eine einzige Bestimmungszahl gegeben sind, die bei Drehungen invariant ist, werden Skalare genannt. Da die Bestimmungszahl sich transformiert wie $a_1^0 = a_2^0 = a_3^0$, sind sie als Größen nullter Ordnung zu betrachten.

Zur feineren Unterscheidung verwenden wir die umfassendere Gruppe der speziellen affinen Transformationen und setzen fest:

Regel III: Zwei Größen, die bei den Transformationen der speziellen affinen Gruppe nicht zerstört werden, sind gleicher Art, wenn ihre Bestimmungszahlen sich bei denselben kogredient zueinander transformieren.

Dabei ist eines zu bemerken. Ist z. B. ein Bivektor **A** gegeben durch die Zahlen A_1, A_2, A_3, die sich kontragredient zu den Bestimmungs-

1) W. Voigt, der ebenfalls Größen nach dem Verhalten ihrer Bestimmungszahlen eingeteilt hat, nennt alle Größen p^{ter} Ordnung, deren Bestimmungszahlen sich in der angegebenen Weise transformieren, auch wenn sie noch Größen niederer Ordnung enthalten und wir sie also zusammengesetzte Größen nennen würden (00. 2, 01. 1). Unsere Definition weicht also wesentlich von der Voigtschen ab. Es wird sich zeigen, daß es zur Ableitung von Zahlensystemen für die geometrischen Größen höherer Ordnung durchaus notwendig ist, die verschiedenen Ordnungen (in unserem Sinne) rein voneinander zu trennen.

zahlen b_1, b_2, b_3 eines Vektors transformieren, so könnte man denselben Bivektor auch eindeutig geben durch die Zahlen $\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_3}$, die sich kogredient zu b_1, b_2 und b_3 transformieren. Der Unterschied zwischen Vektor und Bivektor würde da schwinden. Wir beseitigen diese Schwierigkeit, indem wir von vornherein unter Bestimmungszahlen nur solche Zahlen verstehen, die additiv sind in bezug auf die Multiplikation mit einer Zahl, d. h. also z. B. mit 2 multipliziert werden, wenn die geometrische Größe selbst mit 2 multipliziert wird. Da alle geometrischen Größen, die hier betrachtet werden sollen, durch Produktbildung aus Vektoren und durch Addition solcher Produkte entstehen, kann über die Frage, was es heißt, eine geometrische Größe mit 2 zu multiplizieren, kein Zweifel bestehen.

Die feinere Unterscheidung derjenigen Größen, die speziellen affinen Transformationen nicht standhalten, geschieht durch den mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformationen entwickelten Begriff der Stufe. Wird der allgemeine Längenmaßstab um einen Faktor λ verändert, so ändern sich die Bestimmungszahlen eines Vektors im Verhältnis $\frac{1}{\lambda}$ die eines Bivektors oder einer Größe wie c (S. 23) im Verhältnis $\frac{1}{\lambda^2}$, und die einer Größe wie ξ im Verhältnis $\frac{1}{\lambda^3}$. Wir setzen fest:

> **Regel IV:** Ein Größe ist von erster, zweiter oder dritter (nullter) Stufe, wenn sich bei Änderung des allgemeinen Längenmaßstabes um einen Faktor λ ihre Bestimmungszahlen um einen Faktor $\lambda^{-1 \bmod 3}$ bzw. $\lambda^{-2 \bmod 3}$ bzw. $\lambda^{-3 \bmod 3}$ ändern.

Den Begriff der Stufe verwenden wir jetzt folgendermaßen:

> **Regel V:** Zwei Größen, die bei den Transformationen der speziellen affinen Gruppe zerstört werden, sind gleicher Art, wenn sie von gleicher Ordnung und gleicher Stufe sind.

Die Gleichartigkeit geometrischer Größen ist damit festgelegt. Transformieren sich die Bestimmungszahlen einer Größe bei speziellen affinen Transformationen wie die eines Vektors, so weiß man, daß die Größe jedenfalls ein Vektor ist. Hat die Größe noch dazu dieselbe Richtung wie ein gegebener Vektor, d. h. sind ihre Bestimmungszahlen der des Vektors proportional, so unterscheidet sie sich von dem Vektor nur um einen Zahlenfaktor. Diese Begriffe lassen sich auf beliebige andere Größen übertragen, wobei es sich empfiehlt, das Wort Richtung durch Orientierung zu ersetzen:

Regel VI: Geometrische Größen gleicher Orientierung, das sind geometrische Größen gleicher Orientierungsweise, deren Bestimmungszahlen einander proportional sind, unterscheiden sich nur durch einen Zahlenfaktor.

Sind die Bestimmungszahlen zweier Größen einander proportional, so lange nur Drehungen des Bezugssystems in Frage kommen, so nennen wir sie von gleicher rotationaler Orientierung.

Ableitung des Zahlensystems der geometrischen Größen bis zur ersten Ordnung in einem Punkt in drei Dimensionen. Wir werden jetzt die Kleinschen Prinzipien unter Zugrundelegung der angegebenen Transformationsgruppen zur Bildung des Zahlensystems der geometrischen Größen in einem Punkt in drei Dimensionen verwenden, und zwar zunächst für Größen bis zur ersten Ordnung.

Es seien drei Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ eines rechtwinkligen Rechtssystems gegeben. Die geometrische Bedeutung der Multiplikation dieser Vektoren mit Zahlen und die der Addition werde als bekannt vorausgesetzt. Es sei jetzt eine Multiplikation $\dashv$ vorhanden, von der weiter nichts bekannt ist, als das sie eben eine Multiplikation ist, d. h. dem distributiven Gesetz folgt. Das Zeichen $\dashv$ wollen wir vorläufig, wo Verwechslung ausgeschlossen ist, unterdrücken. Das Produkt in $\dashv$ zweier Vektoren setzt sich dann jedenfalls aus den neun Größen

$$\begin{matrix} \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_3 \\ \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 \\ \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_3 \end{matrix}$$

zusammen:

$$(25) \quad \begin{cases} \Phi = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = a_1 b_1\, \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1 + a_1 b_2\, \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 + a_1 b_3\, \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_3 + \\ \qquad + a_2 b_1\, \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_1 + a_2 b_2\, \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_2 + a_2 b_3\, \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 + \\ \qquad + a_3 b_1\, \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_1 + a_3 b_2\, \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_2 + a_3 b_3\, \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_3 . \end{cases}$$

Zerlegen wir dieses Produkt in folgender Weise:

$$(26) \quad \begin{cases} \text{a)}\ \Phi'' = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, \dfrac{\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_2}{2} + \text{cycl.}, \\ \text{b)}\ \Phi'''' = a_1 b_1\, \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1 + (a_2 b_3 + a_3 b_2)\, \dfrac{\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 + \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_2}{2} + \text{cycl.}, \end{cases}$$

so transformieren sich die Bestimmungszahlen von Φ'':

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2), \text{ cycl.}$$

bei Drehungen des Bezugssystems wie die eines Vektors, und die von Φ''''

wie die Quadrate und doppelten Produkte derselben. Der Teil Φ'' ist also eine Größe erster Ordnung, und zwar, da sich seine Bestimmungszahlen bei speziellen affinen Transformationen wie die eines Bivektors transformieren, ein Bivektor. Als Einheitsbivektoren können wir die drei in (26) auftretenden Größen annehmen und für diese Einheiten die Zeichen $\mathbf{E}_1$, cycl., einführen:

$$(27) \qquad \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2}{2}.$$

Da nun

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

sich bei Drehungen des Koordinatensystems nicht ändert, enthält die Größe Φ'''' einen Teil

$$(28) \qquad \Phi' = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\frac{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3}{2},$$

dessen einzige Bestimmungszahl bei Drehungen invariant bleibt und der demnach eine Größe nullter Ordnung und zwar zweiter Stufe ist. Bei speziellen affinen Transformationen wird diese Größe zerstört. Als Einheit derselben führen wir mit dem Zeichen $\mathbf{m}^{(2)}$ ein:

$$(29) \qquad \mathbf{m}^{(2)} = -\frac{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3}{3}.$$

Der übrigbleibende Teil von Φ'''':

$$(30) \quad \Phi''' = a_1 b_1 \frac{2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3}{3} + \text{cycl.} + (a_2 b_3 + a_3 b_2)\frac{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2}{2} + \text{cycl.},$$

der keine Größen nullter oder erster Ordnung mehr enthält, und dessen Bestimmungszahlen sich ebenfalls transformieren wie

$$a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ 2a_2 a_3,\ 2a_3 a_1,\ 2a_1 a_2,$$

ist eine reine Größe zweiter Ordnung. Wir haben also jetzt die Größe Φ zerlegt in drei Größen, nullter (28), bzw. erster (26a) bzw. zweiter (30) Ordnung.

Da sich nun aber die abzuleitende Analysis nur mit Größen bis zur ersten Ordnung befassen soll, kann man in den Gleichungen

$$(31) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= \mathbf{E}_3 + \frac{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1}{2} \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 &= -\mathbf{m}^{(2)} + \frac{2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3}{3} \end{aligned}\right\} \text{cycl.}$$

die Größen zweiter Ordnung in den zweiten Gliedern null setzen, und erhält so die Rechnungsregeln

$$(32) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= \mathbf{E}_3 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 &= -\mathbf{m}^{(2)} \end{aligned}\right\} \text{cycl.}^{1)}$$

1) Die Antikommutativität der Multiplikation zweier unter sich senkrechter Vektoren, die bekanntlich für sämtliche Analysen der Größen erster Ordnung charakteristisch ist, erweist sich hier als die unmittelbare Folge des Nullsetzens der Größen zweiter Ordnung.

Das Produkt zweier Bivektoren $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ stellt sich jedenfalls aus den neun Größen

$$\begin{matrix} \mathbf{E}_1\mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_1\mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2\mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_3\mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3\mathbf{E}_3 \end{matrix}$$

zusammen:

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P} = \mathbf{CD} = {} & C_1 D_1 \mathbf{E}_1\mathbf{E}_1 + C_1 D_2 \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 + C_1 D_3 \mathbf{E}_1\mathbf{E}_3 \\ & + C_2 D_1 \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 + C_2 D_2 \mathbf{E}_2\mathbf{E}_2 + C_2 D_3 \mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 \\ & + C_3 D_1 \mathbf{E}_3\mathbf{E}_1 + C_3 D_2 \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2 + C_3 D_3 \mathbf{E}_3\mathbf{E}_3 . \end{aligned} \right.$$

Die Größe $\mathfrak{P}$ läßt sich in derselben Weise zerlegen:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}' &= (C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3 D_3) \frac{\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3\mathbf{E}_3}{3} \\ \mathfrak{P}'' &= (C_2 D_3 - C_3 D_2) \frac{\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2}{2} \\ \mathfrak{P}''' &= C_1 D_1 \frac{2\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3\mathbf{E}_3}{3} + \text{cycl.} \\ & \quad + (C_2 D_3 + C_3 D_2) \frac{\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2}{2} + \text{cycl.} \end{aligned} \right.$$

Der erste Teil ist nullter Ordnung erster Stufe und wird bei speziellen affinen Transformationen zerstört. Als Einheit dieser Art Größen mit dem Zeichen $\mathfrak{m}^{(1)}$ wählen wir

$$(35) \quad \mathfrak{m}^{(1)} = - \frac{\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3\mathbf{E}_3}{3} .$$

Der zweite Teil ist erster Ordnung, und da seine Bestimmungszahlen sich bei speziellen affinen Transformationen transformieren wie die eines Vektors, ist er ein Vektor. Legt man die eine Achse des Bezugssystems in die Schnittlinie der Bivektoren $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$, so werden die zwei letzten Bestimmungszahlen von $\mathfrak{P}''$ Null. Es ist also

$$(36) \quad \frac{\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2}{2} = a\mathfrak{e}_1, \quad \text{cycl.,}$$

wo a eine noch näher zu bestimmende Konstante ist. Der dritte Teil ist eine Größe zweiter Ordnung, die null zu setzen ist:

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3\mathbf{E}_3}{2} &= 0 \\ \frac{\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2}{2} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{cycl.}$$

Es resultieren also die Rechnungsregeln:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}_1\mathbf{E}_1 &= -\mathfrak{m}^{(1)} \\ \mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 &= a\mathfrak{e}_3 = -\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2 \end{aligned} \right\} \text{cycl.}$$

Das Produkt Ω eines Vektors **a** mit einem Bivektor **B** oder das Produkt Λ eines Bivektors **C** mit einem Vektor **d** setzt sich jedenfalls aus den neun Größen

$$\begin{matrix} e_1 E_1 & e_1 E_2 & e_1 E_3, & & E_1 e_1 & E_1 e_2 & E_1 e_3, \\ e_2 E_1 & e_2 E_2 & e_2 E_3, & \text{bzw.} & E_2 e_1 & E_2 e_2 & E_2 e_3, \\ e_3 E_1 & e_3 E_2 & e_3 E_3, & & E_3 e_1 & E_3 e_2 & E_3 e_3 \end{matrix}$$

zusammen. Ein solches Produkt läßt sich wieder in drei Teile zerlegen:

$$(39)\quad \begin{cases} \Omega' = (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3)\dfrac{e_1 E_1 + e_2 E_2 + e_3 E_3}{3}, \\ \Omega'' = (a_2 B_3 - a_3 B_2)\dfrac{e_2 E_3 - E_3 e_2}{2} + \text{cycl.}, \\ \Omega''' = a_1 B_1 \dfrac{2 e_1 E_1 - e_2 E_2 - e_3 E_3}{2} + \text{cycl.} \\ \qquad + (a_2 B_3 + a_3 B_2)\dfrac{e_2 E_3 + e_3 E_2}{2} + \text{cycl.} \end{cases}$$

bzw.:

$$(40)\quad \begin{cases} \Lambda' = (C_1 d_1 + C_2 d_2 + C_3 d_3)\dfrac{E_1 e_1 + E_2 e_2 + E_3 e_3}{3}, \\ \Lambda'' = (C_2 d_3 - C_3 d_2)\dfrac{E_2 e_3 - E_3 e_2}{2} + \text{cycl.}, \\ \Lambda''' = C_1 d_1 \dfrac{2 E_1 e_1 - E_2 e_2 - E_3 e_3}{3} + \text{cycl.} \\ \qquad + (C_2 d_3 + C_3 d_2)\dfrac{E_2 e_3 + E_3 e_2}{2} + \text{cycl.} \end{cases}$$

Die ersten Teile Ω' und Λ' haben eine einzige Bestimmungszahl, die nicht nur bei Drehungen sondern auch bei speziellen affinen Transformationen invariant ist. Beide sind also Größen erster Ordnung derselben Art. Die zweiten Teile Ω'' und Λ'' transformieren sich bei Drehungen zueinander kogredient und werden durch spezielle affine Transformationen zerstört. Da sie überdies beide dritter Stufe sind, sind sie gleichartig. Die dritten Teile Ω''' und Λ''' sind zweiter Ordnung und können null gesetzt werden. Wir erhalten also die Rechnungsregeln:

$$(41)\quad \left\{ \begin{aligned} & e_1 E_1 = b E_1 e_1 = -\, m, \\ & e_1 E_2 = -\, e_2 E_1 = c E_1 e_2 = -\, c E_2 e_1 = \varepsilon_3 \end{aligned} \right\} \text{cycl.},$$

wo **m** und ε neueingeführte Bezeichnungen für die als Einheiten gewählten Größen dritter Stufe sind und c eine noch näher zu bestimmende Konstante.

Multiplikation einer Größe mit $m^{(1)}$ bzw. $m^{(2)}$ bzw. **m** erhöht offenbar nur die Stufe der betreffenden Größe um 1 bzw. 2 bzw. 0, kann aber nichts an der rationalen Orientierung ändern. Aus dieser Bemerkung und den

gefundenen Regeln (32), (38) und (41) folgt, daß die Änderung der Assoziation bei einem Produkt dreier Einheiten, also auch bei einem Produkt dreier beliebiger Zahlen Φ, Ψ, Ω, dieses Produkt nur um einen Zahlenfaktor ändert:

$$(\Phi\Psi)\Omega = d\Phi(\Psi\Omega), \tag{42}$$

wo d eine von den multiplizierten Größen abhängige Zahl. Die Multiplikation ist also, wie auch das System gewählt werden mag, jedenfalls assoziativ, insofern als nur die Orientierung der Größen und noch nicht ihr Absolutwert in Betracht kommt.

Führen wir jetzt das assoziative Gesetz in seiner vollen Bedeutung ein, so geht aus (42) hervor, daß sich dadurch jedenfalls keine Identifizierungen von Größen einschleichen, die sich mit dem Klassifizierungsprinzip nicht vertragen, was ja in der Tat der Fall wäre, wenn (42) nicht gelten würde. Es folgt dann unmittelbar, daß in (41):

$$b = c = 1.$$

Wählen wir dazu die Einheiten $\mathfrak{e}$ so, daß auch in (38) $a = 1$ wird, was offenbar stets ohne Änderung des Systems möglich ist, so wird $\mathfrak{m}$ der Modulus, und sämtliche Rechnungsregeln können dann durch einfaches Ausmultiplizieren erhalten werden. Wir wären allerdings schneller zu demselben Resultat gelangt, wenn wir gleich nach (38) das assoziative Gesetz eingeführt hätten, es wäre aber dann doch noch nötig gewesen zu untersuchen, ob letzteres sich mit dem Klassifizierungsprinzip verträgt. Wo wir jetzt durch (42) die Überzeugung gewonnen haben, daß die Bedingung der Assoziativität keinerlei Beschränkung in geometrischer Hinsicht mit sich bringt, die assoziative Analysis also im Stande ist, sämtliche distributive Verknüpfungen der Größen erster Ordnung vollständig zur Darstellung zu bringen[1]), sind wir nicht nur berechtigt, sondern sogar verpflichtet, diese Bedingung einzuführen, da ihre Nichteinführung nur eine unnötige Komplikation der Rechnung herbeiführen würde.

Wir sind also zu dem Resultat gelangt, daß die möglichen Analysen geometrischer Größen bis zur ersten Ordnung sich alle nur um Zahlenfaktoren voneinander unterscheiden, und daß unter ihnen eine einzige assoziative ist, die, da sie das ganze Gebiet beherrscht, ihrer Einfachheit wegen vorzuziehen ist. Ihre Rechnungsregeln lauten tabellarisch:

---

1) Vgl. die Bemerkung über die Darstellung aller rationalen ganzen Funktionen von Vektoren auf S. 9.

(43a)

$\nearrow$	e_1	e_2	e_3	$m^{(1)}$	E_1	E_2	E_3	$m^{(2)}$	ε_1	ε_2	ε_3	m
e_1	$-m^{(2)}$	E_3	$-E_2$	E_1	$-m$	ε_3	$-\varepsilon_2$	ε_1	$-m^{(1)}$	e_3	$-e_2$	e_1
e_2	$-E_3$	$-m^{(2)}$	E_1	E_2	$-\varepsilon_3$	$-m$	ε_1	ε_2	$-e_3$	$-m^{(1)}$	e_1	e_2
e_3	E_2	$-E_1$	$-m^{(2)}$	E_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	$-m$	ε_3	e_2	$-e_1$	$-m^{(1)}$	e_3
$m^{(1)}$	E_1	E_2	E_3	$m^{(2)}$	ε_1	ε_2	ε_3	m	e_1	e_2	e_3	$m^{(1)}$
E_1	$-m$	ε_3	$-\varepsilon_2$	ε_1	$-m^{(1)}$	e_3	$-e_2$	e_1	$-m^{(2)}$	E_3	$-E_2$	E_1
E_2	$-\varepsilon_3$	$-m$	ε_1	ε_2	$-e_3$	$-m^{(1)}$	e_1	e_2	$-E_3$	$-m^{(2)}$	E_1	E_2
E_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	$-m$	ε_3	e_2	$-e_1$	$-m^{(1)}$	e_3	E_2	$-E_1$	$-m^{(2)}$	E_3
$m^{(2)}$	ε_1	ε_2	ε_3	m	e_1	e_2	e_3	$m^{(1)}$	E_1	E_2	E_3	$m^{(2)}$
ε_1	$-m^{(1)}$	e_3	$-e_2$	e_1	$-m^{(2)}$	E_3	$-E_2$	E_1	$-m$	ε_3	$-\varepsilon_2$	ε_1
ε_2	$-e_3$	$-m^{(1)}$	e_1	e_2	$-E_3$	$-m^{(2)}$	E_1	E_2	$-\varepsilon_3$	$-m$	ε_1	ε_2
ε_3	e_2	$-e_1$	$-m^{(1)}$	e_3	E_2	$-E_1$	$-m^{(2)}$	E_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	$-m$	ε_3
m	e_1	e_2	e_3	$m^{(1)}$	E_1	E_2	E_3	$m^{(2)}$	ε_1	ε_2	ε_3	m

oder in Formeln:

$$
(43\text{b})\quad
\left.\begin{array}{lll}
 & & \text{Umgekehrt:} \\
e_1 \dashv e_2 = & E_3 & -E_3 \\
e_1 \dashv e_1 = & -m^{(2)} & -m^{(2)} \\
e_1 \dashv E_2 = & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \\
e_1 \dashv E_1 = & -m & -m \\
e_1 \dashv \varepsilon_2 = & e_3 & -e_3 \\
e_1 \dashv \varepsilon_1 = & -m^{(1)} & -m^{(1)} \\
E_1 \dashv e_2 = & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \\
E_1 \dashv E_2 = & e_3 & -e_3 \\
E_1 \dashv E_1 = & -m^{(1)} & -m^{(1)} \\
E_1 \dashv \varepsilon_2 = & E_3 & -E_3 \\
E_1 \dashv \varepsilon_1 = & -m^{(2)} & -m^{(2)} \\
\varepsilon_1 \dashv e_2 = & e_3 & -e_3 \\
\varepsilon_1 \dashv E_2 = & E_3 & -E_3 \\
\varepsilon_1 \dashv \varepsilon_2 = & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \\
\varepsilon_1 \dashv \varepsilon_1 = & -m & -m
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
m^{(1)} \dashv e_1 = E_1 \\
m^{(1)} \dashv E_1 = \varepsilon_1 \\
m^{(1)} \dashv \varepsilon_1 = e_1 \\
m^{(2)} \dashv e_1 = \varepsilon_1 \\
m^{(2)} \dashv E_1 = e_1 \\
m^{(2)} \dashv \varepsilon_1 = E_1 \\
m^{(1)} \dashv m^{(2)} = m \\
m^{(1)} \dashv m^{(1)} = m^{(1)} \\
m^{(2)} \dashv m^{(2)} = m^{(1)}
\end{array}\right\}\text{Kommut.} \\
\\
m = \text{Modulus.}
\end{array}\right\}\text{Cycl.}
$$

Von den Größen e, E, ε, $m^{(1)}$, $m^{(2)}$ und m sind e, E und m Ausdehnungsgrößen bzw. erster, zweiter und dritter Stufe, eine Größe in e ist also ein Vektor, eine Größe in E ein Bivektor und eine Größe in m ein Trivektor oder gewöhnlicher Skalar. Die Größen $m^{(1)}$, $m^{(2)}$ und ε sind geo-

metrische Größen bzw. erster, zweiter und dritter Stufe, aber keine Ausdehnungsgrößen, da sie speziellen affinen Transformationen nicht standhalten.

Wie aus der Tabelle (43a) hervorgeht, enthält das System zwei besonders wichtige Untersysteme, das System in ε und $\mathfrak{m}$:

(44)

	ε_1	ε_2	ε_3	$\mathfrak{m}$
ε_1	$-\mathfrak{m}$	ε_3	$-\varepsilon_2$	ε_1
ε_2	$-\varepsilon_3$	$-\mathfrak{m}$	ε_1	ε_2
ε_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	$-\mathfrak{m}$	ε_3
$\mathfrak{m}$	ε_1	ε_2	ε_3	$\mathfrak{m}$

ein ursprüngliches System zweiter Ordnung in geometrischer Form erster Ordnung U_{g2}, und das System in $\mathfrak{m}^{(1)}$, $\mathfrak{m}^{(2)}$ und $\mathfrak{m}$:

(45)

	$\mathfrak{m}^{(1)}$	$\mathfrak{m}^{(2)}$	$\mathfrak{m}$
$\mathfrak{m}^{(1)}$	$\mathfrak{m}^{(2)}$	$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{m}^{(1)}$
$\mathfrak{m}^{(2)}$	$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{m}^{(1)}$	$\mathfrak{m}^{(2)}$
$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{m}^{(1)}$	$\mathfrak{m}^{(2)}$	$\mathfrak{m}$

eine Hauptreihe dritter Ordnung in geometrischer Form erster Ordnung H_{g3}. Da jede Einheit des Systems als kommutatives Produkt der korrespondierenden Einheit des Untersystems in ε und $\mathfrak{m}$, und einer der drei Zahlen $\mathfrak{m}^{(1)}$, $\mathfrak{m}^{(2)}$ oder $\mathfrak{m}$ geschrieben werden kann, so ist das Gesamtsystem aufzufassen als das Produkt:

$$U_{g2}\,H_{g3}.$$

Da jede Einheit des Systems in dem Untersystem (44) ihre korrespondierende hat, ist dieses Untersystem ein getreues Abbild des ganzen Systems. (44) sei darum das Kernsystem genannt, (45) heiße das Potenzensystem.

Die Gleichungen (43) gelten nicht nur für das System mit den Einheiten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{E}$ und ε, sondern auch für jedes beliebige andere System, das durch Drehung mit dem ersten zur Deckung gebracht werden kann. Umgekehrt ist also das Produkt in $\dashv$ zweier Größen unabhängig davon, welches System von Einheiten man gewählt hat. Wir sagen daher, die Multiplikation $\dashv$ ist invariant bei allen Drehungen des Koordinatensystems. Dies ist der geometrische Ausdruck für den Satz der durchgehenden Selbstisomorphie eines Zahlensystems bei verschiedenen Hauptreihen (vgl. S. 17).

Als einfache Größen seien in Anlehnung an Graßmann diejenigen bezeichnet, die durch fortgesetzte Multiplikation von Vektoren entstehen

können.[1]) Die Summe zweier Größen verschiedener Stufen ist also z. B. nicht einfach und jede einfache Größe läßt sich entweder in $\mathbf{e}$ und $\mathbf{m}^{(1)}$, oder in $\mathbf{E}$ und $\mathbf{m}^{(2)}$ oder in ε und $\mathbf{m}$ angeben. Das Produkt zweier einfacher Größen ist offenbar wieder eine einfache Größe. Nur die einfachen Größen lassen, wie wir sehen werden, eine einfache geometrische Deutung zu. Da das ursprüngliche System zweiter Ordnung, in geometrischer Form erster Ordnung (5), bekanntlich keine reellen Teiler der Null enthält[2]), so besitzt das System $U_{\varrho 2} H_{\varrho 3}$ ebenfalls keine reellen Teiler der Null, solange wir uns beschränken auf die Betrachtung einfacher Größen. Unter dieser Bedingung ist die Division also eine eindeutige Operation. (Vgl. S. 58.)

Die allgemeine einfache Größe besteht aus zwei Teilen, einer Größe nullter Ordnung in $\mathbf{m}^{(1)}$, $\mathbf{m}^{(2)}$ oder $\mathbf{m}$ und einer erster Ordnung in $\mathbf{e}$, $\mathbf{E}$ oder ε. Diese Teile wollen wir den Skalar bzw. Vektorteil[3]) der Größe nennen und durch die Funktionszeichen S bzw. V aus der vollständigen einfachen Größe ableiten. Es ist also z. B.:

$$S(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 + x_0 \mathbf{m}^{(1)}) = x_0 \mathbf{m}^{(1)},$$
$$V(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 + x_0 \mathbf{m}^{(1)}) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

Die algebraische Zerlegung der totalen Multiplikation. So wie das System jetzt vorliegt, ist das Produkt zweier Vektoren gleich der Summe eines Bivektors und eines Vielfachen von $\mathbf{m}^{(2)}$, ebenso das Produkt zweier Bivektoren gleich der Summe eines Vektors und eines Vielfachen von $\mathbf{m}^{(1)}$ usw. Diese Bestandteile lassen sich trennen, indem wir die Multiplikation $\dashv$ zerlegen, was auf verschiedene Weisen geschehen kann.

Eine jede invariante nicht kommutative Multiplikation $\dashv$ läßt sich sofort in zwei ebenfalls unter denselben Bedingungen invariante Multiplikationen $\cdot$ und $\times$ zerlegen, indem man setzt:

$$\Phi \cdot \Psi = \frac{\Phi \dashv \Psi + \Psi \dashv \Phi}{2} \quad \text{oder:} \; \cdot = \frac{\dashv + \vdash}{2}$$
$$(46) \qquad \Phi \times \Psi = \frac{\Phi \dashv \Psi - \Psi \dashv \Phi}{2} \quad \text{oder:} \; \times = \frac{\dashv - \vdash}{2}$$
$$\dashv = \cdot + \times = \dot{\times}\,.$$

Die Umkehrung von $\times$ mag durch $\not\times$ angegeben werden (vgl. S. 165). Wir nennen $\times$ die vektorische, $\cdot$ die skalare Multiplikation, und beide

1) Graßmann 62. 1, S. 56.

2) Bewiesen von F. G. Frobenius 78. 2, und von C. S. Peirce 81. 3, vgl. auch F. X. Grissemann 00. 4.

3) Das Wort Vektor wird hier in einer erweiterten Bedeutung verwendet (vgl. S. 40).

im Gegensatz zur Hauptmultiplikation $\dashv = \times$ die Grundmultiplikationen. Die Multiplikationsregeln erscheinen bei Ausführung dieser Zerlegung in der Form:

$$
(47)\qquad
\left\{
\begin{array}{lllll}
 & & \text{Umgekehrt:} & & \\
e_1 \times e_2 = & E_3 & -E_3 & & \\
e_1 \cdot e_1 = & -m^{(2)} & -m^{(2)} & & \\
e_1 \times E_2 = & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 & & \\
e_1 \cdot E_1 = & -m & -m & m^{(1)} \cdot e_1 & = E_1 \\
e_1 \times \varepsilon_2 = & e_3 & -e_3 & m^{(1)} \cdot E_1 & = \varepsilon_1 \\
e_1 \cdot \varepsilon_1 = & -m^{(1)} & -m^{(1)} & m^{(1)} \cdot \varepsilon_1 & = e_1 \\
E_1 \times e_2 = & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 & m^{(2)} \cdot e_1 & = \varepsilon_1 \\
E_1 \times E_2 = & e_3 & -e_3 & m^{(2)} \cdot E_1 & = e_1 \\
E_1 \cdot E_1 = & -m^{(1)} & -m^{(1)} & m^{(2)} \cdot \varepsilon_1 & = E_1 \\
E_1 \times \varepsilon_2 = & E_3 & -E_3 & m^{(1)} \cdot m^{(1)} & = m^{(2)} \\
E_1 \cdot \varepsilon_1 = & -m^{(2)} & -m^{(2)} & m^{(1)} \cdot m^{(2)} & = m \\
\varepsilon_1 \times e_2 = & e_3 & -e_3 & m^{(2)} \cdot m^{(2)} & = m^{(1)} \\
\varepsilon_1 \times E_2 = & E_3 & -E_3 & & \\
\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 = & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 & & \\
\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 = & -m & -m & m = \text{Modulus für } \cdot . &
\end{array}
\right.
\quad \text{(die Zeilen mit } m^{(1)}, m^{(2)} \text{: Kommutativ.)} \quad \text{cycl.}
$$

Multiplikative Verknüpfungen, die nicht angegeben sind, ergeben null. Wie man sieht, verhalten sich die Multiplikationen der Größen auf allen Stufen ganz gleich, was die rotationale Orientierung und den Absolutwert der Faktoren und des Produktes betrifft. Denn in zwei Produkten wie z. B. $e_1 \times E_2 = \varepsilon_3$ und $E \times \varepsilon_2 = E_3$ sind sowohl die Faktoren wie das Produkt von gleicher rotationaler Orientierung und gleichem Absolutwert.

Die algebraische Zerlegung von $\dashv$ wäre also auch als eine Zerlegung nach der rotationalen Orientierung zu bezeichnen.

Die abgeleiteten Multiplikationen. Wir haben bisher eine Hauptmultiplikation $\dashv = \times$, zwei Grundmultiplikationen $\cdot$, $\times$, und zwei Funktionszeichen S, V, kennen gelernt. Durch Kombination der Hauptmultiplikationen mit den Funktionszeichen erhalten wir nun weiter noch abgeleitete Multiplikationen. Nehmen wir nämlich von einem Produkt in $\times$ den Skalar bzw. Vektorteil, z. B.:

$$S(\Phi \times \Psi),$$

wo Φ und Ψ einfache Größen sind, so ist die entstandene Funktion von Φ

und Ψ offenbar eindeutig und distributiv in bezug auf die Addition. Wir sind demnach berechtigt sie als selbständiges Produkt aufzufassen und ihr ein eigenes Multiplikationszeichen zuzuordnen. Dazu seien folgende Bezeichnungen gewählt:

$$(48)\qquad \begin{cases} \Phi \mathbin{\dashv_{\cdot}} \Psi = \mathrm{S}(\Phi \dashv \Psi) \\ \Phi \mathbin{\dashv_{\times}} \Psi = \mathrm{V}(\Phi \dashv \Psi). \end{cases}$$

Für die Multiplikation geometrischer Größen erster Ordnung, also Größen in $\mathfrak{e}$, $\mathbf{E}$ oder ε gilt offenbar:

$$(49)\qquad \begin{cases} \Phi \mathbin{\dashv_{\cdot}} \Psi = \Phi \cdot \Psi \\ \Phi \mathbin{\dashv_{\times}} \Psi = \Phi \times \Psi, \end{cases}$$

so daß hier die abgeleiteten Multiplikationen $\dashv_{\cdot}$ und $\dashv_{\times}$ nicht nötig sind, und durch $\cdot$ bzw. $\times$ ersetzt werden können. Für die Multiplikation beliebiger einfacher Größen sind sie aber nicht zu ersetzen, und auch nicht wie z. B. die Hauptmultiplikationen als Vielfachsumme von $\cdot$ und $\times$ anzugeben. Grundmultiplikationen, Hauptmultiplikation und abgeleitete Multiplikationen beherrschen zusammen das ganze Gebiet des in $\cdot$ und $\times$ zerlegten Systems in $\mathfrak{e}$, $\mathbf{E}$, ε, $\mathfrak{m}^{(1)}$, $\mathfrak{m}^{(2)}$ und $\mathfrak{m}$ (vgl. S. 80).[1])

Die Deutung der Zahlen als geometrische Größen, und der Kombinationen einer Zahl mit einer Multiplikation als Operatoren. Das System läßt sich in dieser Form folgendermaßen deuten. Ist ein $\mathfrak{a}$ Vektor:

$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 + a_3 \mathfrak{e}_3$$

so ist:

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{E}_1 + A_2 \mathbf{E}_2 + A_3 \mathbf{E}_3,$$

wo:

$$A_1 = a_1, \quad \text{cycl.},$$

ist, der auf $\mathfrak{a}$ senkrechte Bivektor mit demselben absoluten Wert oder Betrag:

$$\mathrm{M}\mathfrak{a} = a_m = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

1) Beim praktischen Gebrauch des Systems kann man, da Skalare und Vektoren durch die Schriftart hinreichend unterschieden sind, drei genau angegebene Multiplikationszeichen unterdrücken, z. B. $\cdot$ zwischen Skalaren und Skalaren, $\cdot$ zwischen Skalaren und anderen Größen, und $\times$ zwischen Vektoren und Vektoren. Von selbst verschwindet dann auch $\dashv_{\times}$ zwischen Vektoren und anderen Größen. Eine solche Abkürzung ist sehr zu empfehlen, Hauptsache dabei ist, daß die Zeichen stets vorhanden bleiben und jederzeit wieder eingesetzt werden können, insbesondere zur Unterscheidung von Größen und Operatoren. Da aber Hauptaufgabe dieses Buches ist, das System zweiter Ordnung zu entwickeln und darzustellen, mag für das System erster Ordnung diese Andeutung genügen. (Vgl. S. 96 und 115.)

$\mathbf{a}$ ist nach Graßmann die Ergänzung von $\mathbf{A}$ und umgekehrt. Das vektorische Produkt zweier Vektoren ist dem Bivektor gleich, der durch das durch sie bestimmte Parallelogramm gegeben wird. Das vektorische Produkt zweier Bivektoren ist ein Vektor in der Schnittgeraden ihrer Ebenen. Die rechte Winkelgröße:

$$\alpha = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3,$$

wo:

$$\alpha_1 = a_1, \quad \text{cycl.},$$

ist, ist ein rechter Versor (vgl. S. 146), verbunden mit einem Zahlenfaktor a_m. Dieser rechte Versor hat $\mathbf{a}$ als Drehungsachse (oder Index) und $\mathbf{A}$ als Drehungsebene. Multipliziert mit einem Vektor in $\mathbf{A}$ oder einem Bivektor durch $\mathbf{a}$, dreht derselbe diese Größen um 90^0. Umgekehrt ist er der eindeutige Quotient zweier Vektoren in $\mathbf{A}$ oder zweier Bivektoren durch $\mathbf{a}$, die einen geraden Winkel einschließen und dieselbe absolute Größe haben. Die Größe:

$$\frac{\alpha}{a} \sin \varphi + \mathbf{m} \cos \varphi$$

ist ein schiefer Versor mit derselben Achse und Ebene als α. Sie dreht durch $\times$ verknüpft mit Vektoren in $\mathbf{A}$ oder Bivektoren durch $\mathbf{a}$ diese um einen Winkel φ, und ist der eindeutige Quotient zweier Vektoren in $\mathbf{A}$ oder Bivektoren durch $\mathbf{a}$, die einen Winkel φ einschließen und denselben absoluten Wert haben. Da die Versoren mit Zahlenfaktoren vier Bestimmungsstücke erfordern hat Hamilton sie Quaternionen genannt. Ein Quaternion ist die Summe einer Größe in ε (eines rechten Quaternions), und eines Vielfachen von $\mathbf{m}$. Die Versoren sind auch darzustellen als Teile größter Kreise auf einer Kugel (Fig. 3).

Das assoziative Gesetz besagt dann, daß, wenn α und β schiefe Versoren sind, und $\mathbf{c}$ ein Vektor oder Bivektor,

$$\alpha \times (\beta \times \mathbf{c}) = (\alpha \times \beta) \times \mathbf{c}$$

ist, daß demnach die Multiplikation von Versoren der nicht kommutativen aber wohl assoziativen geometrischen Zusammenstellung von Strecken auf der Kugelfläche entspricht.[1])

Fig. 3. Geometrische Darstellung des Produktes zweier Versoren.

Die Größen in $\mathbf{e}$, $\mathbf{E}$, ε und $\mathbf{m}$ haben hierdurch ihre Deutung erhalten. Zunächst entsprechen den Größen in $\mathbf{e}$ bzw. $\mathbf{E}$ hinsichtlich Betrag und Richtung bzw. Drehrichtung ganz bestimmte Strecken bzw. Ebenen, den Größen in ε und $\mathbf{m}$ hinsichtlich Achse, Betrag, Drehrichtung und

1) Vgl. z. B. H. Hankel 67. 1 S. 157.

Zahlenfaktor ganz bestimmte Winkel im Raume[1]), den Größen in $\mathfrak{m}$ dem Inhalt nach ganz bestimmte Teile des Raumes. In ähnlicher Weise entspricht einer Größe in $\mathfrak{m}^{(1)}$ ein Zahlenfaktor mit einem übrigens beliebigen Einheitsvektor mit seiner Ergänzung, eine Art räumlicher rechter Winkel, wobei man sich eine Richtung zu denken hat von Vektor nach Bivektor, und einer Größe in $\mathfrak{m}^{(2)}$ derselbe Winkel aber mit umgekehrter Richtung, während zu Größen in $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{m}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{m}^{(2)}$ in derselben Weise schiefe räumliche Winkel mit Zahlenfaktoren gehören.[2]) Daneben lassen sich nun aber noch die Operatoren in $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{m}^{(1)}$ bzw $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{m}^{(2)}$ bzw. ε und $\mathfrak{m}$, jedesmal verbunden mit der abgeleiteten Multiplikation $\overline{\times}|$, für sich deuten. Ein Operator in ε und $\mathfrak{m}$ mit $\overline{\times}|$ transformiert alle Vektoren, Bivektoren und rechte Versoren in Größen derselben Art. Er ist ein Drehoperator verbunden mit einem Zahlenfaktor für alle Vektoren, die senkrecht auf seiner Achse stehen, für alle Bivektoren, die durch seine Achse gehen, und für alle rechte Winkelgrößen, deren Achsen senkrecht auf seiner Achse stehen. Der Operator $\mathfrak{m}\,\cdot$ kommt in seiner Wirkung der Multiplikation mit der gewöhnlichen Zahl 1 gleich. Der Operator $\mathfrak{m}^{(1)}\cdot$ verwandelt alle Vektoren in ihre Ergänzungen, alle Bivektoren in rechte Versoren mit zu ihnen senkrechter Achse, und alle rechte Versoren in Vektoren in der Richtung ihrer Achse, alles ohne Änderung des absoluten Wertes. Ein Operator in $\mathfrak{e}\ \times$ ist zu betrachten als die Kombination des korrespondierenden Operators in $\varepsilon\ \times$ und des Operators $\mathfrak{m}^{(1)}\cdot$ in beliebiger Reihenfolge, ein Operator in $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{m}$ mit $\overline{\times}|$ kommt demnach in seiner Wirkung dem Zusammenwirken eines Quaternions mit $\overline{\times}|$ mit $\mathfrak{m}^{(1)}\cdot$ gleich. In derselben Weise erfolgt die Deutung des Operators $\mathfrak{m}^{(2)}\cdot$ und der Operatoren in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{m}^{(2)}$ mit $\overline{\times}|$. Diese Operatoren, die die Ordnung einer Größe, auf die sie wirken, nicht verändern, also z. B. einen Vektor in einen Bivektor — beide gerichtete Größen erster Ordnung erster Stufe — überführen, und dabei einfache Größen als solche bestehen lassen, wollen wir einfache Operatoren nennen. Ein einfacher Operator besteht immer aus einer Zahl verbunden mit einer abgeleiteten Multiplikation, z. B.:

$$(\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \alpha_0\mathfrak{m})\ \overline{\times}|\ (b_1\mathfrak{e}_1 + b_2\mathfrak{e}_2 + b_3\mathfrak{e}_3)$$
$$= \{(\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3)\times + \alpha_0\,\mathfrak{m}\,\cdot\}\ (b_1\mathfrak{e}_1 + b_2\mathfrak{e}_2 + b_3\mathfrak{e}_3).$$

Da, wie aus (47) hervorgeht, eine Größe in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{E}$ oder ε nur einen ein-

1) Ein Winkel ändert hier seinen Wert nicht, wenn seine bestimmenden Strecken beide um den gleichen Winkel und in derselben Richtung um eine Achse drehen, die senkrecht auf beiden Strecken steht.

2) Ein räumlicher Winkel ändert hier seinen Wert nicht, wenn die bestimmende Strecke und Ebene beide um den gleichen Winkel um eine Achse drehen, die in der Ebene liegt und senkrecht zur Strecke steht.

fachen Operator bilden kann mit ×, und eine Größe in $\mathfrak{m}^{(1)}$, $\mathfrak{m}^{(2)}$ oder $\mathfrak{m}$ nur mit ·, besteht ein einfacher Operator also stets aus den beiden Teilen einer einfachen Größe, zu welchen sich Multiplikationen gesellen, in der Weise, daß die Größe erster Ordnung nur die vektorische, die nullter Ordnung nur die skalare Multiplikation zuerteilt bekommt. Operatoren, die in anderer Weise zusammengesetzt sind, z. B. aus einer Zahl in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{E}$ oder ε mit der Multiplikation ·, ändern im Gegensatz zu den einfachen die Ordnung der Größe auf die sie wirken. So führt ein Operator in $\mathfrak{e}$ · Vektoren in Skalare in $\mathfrak{m}^{(2)}$ über. Diese komplizierten Operatoren gestatten keine einfache geometrische Deutung.

Die Beziehungen des Systems zur Quaternionentheorie. Das hier abgeleitete assoziative System unterscheidet sich von allen bislang bekannten namentlich dadurch, daß es gestattet, in einheitlicher Weise Vektoren, Bivektoren und Quaternionen zu behandeln, und ihre Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen vollständig zum Ausdruck zu bringen. Kein einziges der bisherigen Systeme, die sich entweder nur mit Vektoren, oder nur mit Vektoren und Quaternionen, oder nur mit Vektoren und Bivektoren befassen, ist imstande, gerade diese Beziehungen richtig darzustellen, und der heftige Streit, der jetzt seit mehr als zwanzig Jahren zwischen Quaternionisten, Monovektorianern und Bivektorianern geführt wird, ist wohl zum größten Teil darauf zurückzuführen, daß das Fehlen eines umfassenden Systems es für alle Parteien außerordentlich schwierig, wenn nicht unmöglich, gemacht hat, die Gedanken des Gegners richtig zu erfassen, ein Umstand, der zu großen Mißverständnissen Anlaß geben mußte.

So, wie das System jetzt vorliegt, erscheint es in mancher Hinsicht recht brauchbar. In seinen Formeln kommen ja, wie wir sahen, der Schnitt zweier Ebenen in einer Geraden, die Bestimmung einer Ebene durch zwei Geraden, die Bestimmung eines Winkels durch zwei Geraden oder zwei Ebenen usw. direkt zum Ausdruck. Wie man sieht, dankt es einen großen Teil seiner Einfachheit dem Umstande, daß seine Formeln auf allen Stufen dieselbe Form haben, und man so eigentlich immer mit demselben Kernsystem zu tun hat, das sich auf drei Stufen wiederholt. Für gewisse Zwecke läßt sich das System aber noch einfacher gestalten.

Betrachten wir dazu die auftretenden Größen nur nach ihrem Verhalten bei Drehungen, und lassen wir demnach die feinere Unterscheidung, die aus dem Verhalten bei speziellen affinen Transformationen und Ähnlichkeitstransformationen gewonnen wird, fallen, so gibt es nur noch zwei Größenarten, solche nullter Ordnung in $\mathfrak{m}^{(1)}$, $\mathfrak{m}^{(2)}$ oder $\mathfrak{m}$, und solche erster Ordnung in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{E}$ und ε. Der Unterschied zwischen Vektoren,

Bivektoren und rechten Quaternionen einerseits und zwischen den drei verschiedenen Skalaren andererseits verschwindet. (Die Unterscheidung zwischen polaren und axialen Vektoren, worüber weiter unten die Rede sein wird, ist eine ganz andere, und hat mit der zwischen Vektoren, Bivektoren und rechten Quaternionen nichts zu tun.) (Vgl. S. 61.)

In der Physik sind wir nun aber gerade auf diese Betrachtungsweise angewiesen, da uns von einer physikalischen Größe nur das Verhalten der Bestimmungszahlen bei Drehungen (und bei Inversionen — dasselbe bestimmt die polare oder axiale Natur —) bekannt ist. Da nun aber Monovektoren, Bivektoren und rechte Quaternionen sich, eine jede Größe bezogen auf ihre eigenen Einheiten, in dieser Beziehung ganz gleich verhalten, hat es, wie Prandtl 1904[1]) sehr richtig bemerkt hat, überhaupt keinen Sinn, zu fragen, zu welchen von diesen Dreien eine physikalische Größe gerechnet werden muß. Es ist also für solche Anwendungen angebracht, den Unterschied zwischen $\mathfrak{e}$, $\mathbf{E}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ überhaupt fallen zu lassen, und zu dem Gattungsbegriff, geometrische Größe erster Ordnung, aufzusteigen, der die Begriffe Monovektor, Bivektor und rechter Quaternion umfaßt.[2]) Dies geschieht, indem wir $\mathfrak{e}$, $\mathbf{E}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ durch einen Buchstaben $\mathfrak{i}$ ersetzen, also setzen:

$$\mathfrak{e} = \mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} = \mathfrak{i}, \tag{50}$$

eine Gleichung, die nur für die Zwecke dieser Untersuchung richtig, aber dann auch absolut richtig ist. Das System geht durch diese Gleichsetzung zurück auf sein Kernsystem:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{i}_1 = -\mathfrak{m} \\ \mathfrak{i}_1 \times \mathfrak{i}_2 = \mathfrak{i}_3 = -\mathfrak{i}_2 \times \mathfrak{i}_1 \end{array}\right\} \text{ cycl.}, \tag{51}$$

die Hamiltonschen Quaternionen mit zerlegter Multiplikation. Wir können dieses Kernsystem also das assoziative System der geometrischen Größen bis zur ersten Ordnung in drei Dimensionen in bezug auf Drehungen nennen. Da die rotationale Orientierung der Produkte in den Grundmultiplikationen $\cdot$, $\times$ und den abgeleiteten Multiplikationen $\urcorner\!\!|_{\cdot}$ und $\urcorner\!\!|_{\times}$ sich auf alle Stufen des Systems in $\mathfrak{e}$, $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathfrak{m}^{(1)}$, $\mathfrak{m}^{(2)}$ und $\mathfrak{m}$ in gleicher Weise zu den rotationalen Orientierungen der Faktoren verhält, gehen diese Multiplikationen ohne weiteres in das System in $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{m}$ über (vgl. S. 51). Wir wären bei der Ableitung sofort zu diesem System gelangt, wenn wir die feinere Unterscheidung vermittels der speziellen affinen Gruppe überhaupt nicht eingeführt hätten. An Stelle der Regeln III, IV und V

1) 04. 4

2) Den Gattungsbegriff deuten wir, wie gebräuchlich, durch das Wort Vektor an, wodurch dieses jetzt eine erweiterte Bedeutung erhält (vgl. S. 34).

S. 25 und 26 wäre dann einfach die Regel getreten, daß Größen gleicher Ordnung auch gleicher Art sind (vgl. S. 63 und 65).

Bekanntlich ersetzt man allgemein einfachheitshalber $\mathbf{m}$ durch 1. Da aber

$$\mathbf{m} \cdot = 1 \circ \quad \text{(siehe S. 15)}, \tag{52}$$

bedeutet eine solche Ersetzung, daß:

$$\left.\begin{cases} 1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{cases}\right\} \text{cycl.}, \tag{53}$$

wir also nun auch fernerhin des Recht haben, die Multiplikation von gewöhnlichen Zahlen unter sich und mit Vektoren durch die skalare Multiplikation zu ersetzen. Eigentlich erklären wir ja durch die Ersetzung von $\mathbf{m}$ durch 1 alle gewöhnlichen Zahlen für Größen in $\mathbf{m}$. Ersetzen wir zwar $\mathbf{m}$ durch 1, aber nicht die Multiplikation $\circ$ von Skalaren unter sich und mit Vektoren durch $\cdot$, so bleiben in dem System drei verschiedene Multiplikationen, und dasselbe gestaltet sich demnach weniger einfach. Die herkömmliche Vektoranalysis nimmt einen solchen Standpunkt ein, der allerdings durch die Geschichte ihres Entstehens erklärt werden kann (vgl. S. 49); ihre Formeln erlangen aber dadurch, wie sich im weiteren Verlaufe zeigen wird, eine unnötige Komplikation und Asymmetrie (vgl. S. 47ff., 87, 148, 176, 190ff., 204, 214).

In der hier abgeleiteten Gestalt läßt sich das System in $\mathbf{m}$ und $\mathbf{i}$ folgendermaßen deuten. Der Vektor:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3$$

stellt jede geometrische Größe erster Ordnung, also sowohl einen Vektor im engeren Sinne, als auch einen Bivektor, als auch einen rechten Quaternion in der Richtung des Punktes a_1, a_2, a_3 mit dem Betrag a_m dar. Das vektorische Produkt zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist dem Vektor gleich, dessen Betrag durch den Inhalt des durch sie bestimmten Parallelogramms gegeben ist, und der senkrecht zu ihnen gerichtet ist. Sein Richtungssinn ist der Drehrichtung von $\mathbf{a}$ nach $\mathbf{b}$ vermittels einer Rechtsschraube zugeordnet. Die Größe:

$$\frac{\mathbf{a}}{a_m} \sin\varphi + \mathbf{m} \cos\varphi$$

ist ein schiefer Versor mit $\mathbf{a}$ als Achse und φ als Winkel, der eindeutige Quotient zweier Vektoren gleichen Betrages senkrecht auf $\mathbf{a}$, die den Winkel φ einschließen. Ein Quaternion, ein schiefer Versor mit Zahlenfaktor, erfordert vier Bestimmungsstücke, und ist in diesem System der Summe eines Vektors und einer gewöhnlichen Zahl gleich.

Für jede Zahl

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3 + a_0 \mathbf{m}$$

des Systems besteht die Identität:

$$\mathbf{a}^{2\dashv} - 2(\mathrm{S}\mathbf{a})\mathbf{a} + \mathrm{S}_2\mathbf{a} = 0 \quad (54)$$

[1]),

wo:

$$\mathrm{S}_2\mathbf{a} = a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2, \quad (55)$$

eine Zahl, die wir den zweiten Skalar des Quaternions $\mathbf{a}$ nennen wollen.[2])

Daneben erhalten die einfachen Operatoren, die in $\mathbf{m}$ und $\mathbf{i}$ mit $\underset{\times}{\dashv}$ geschrieben werden, folgende Deutung. Ein Operator in $\mathbf{m}$ und $\mathbf{i}$ mit $\underset{\times}{\dashv}$ ist ein Drehoperator mit Zahlenfaktor für alle Vektoren senkrecht auf seinen Vektorteil und macht diesen Teil selbst zu Null. Als einfacher Operator besteht er aus einem Vektor mit vektorischer und einem Skalar mit skalarer Multiplikation. Zwecks späterer Verallgemeinerung wollen wir dies in der folgenden Regel aussprechen:

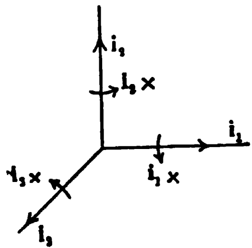


Fig. 4. Geometrische Deutung der Zahlen $\mathbf{i}$ und der Operatoren $\mathbf{i}\,\times$ (vgl. Fig. 12, S. 86).

Regel: In dem assoziativen System der geometrischen Größen bis zur ersten Ordnung sind in einem einfachen Operator die Teile verschiedener Ordnung jeder nur mit der zu ihr gehörigen Grundmultiplikation verbunden.

Die Deutung der Zahlen $\mathbf{i}$ und der Operatoren $\mathbf{i}\,\times$ läßt sich aus nebenstehender Figur ablesen.

Der Streit der verschiedenen Schulen über die Identifizierung von Vektoren, Bivektoren und rechten Quaternionen. Der Streit zwischen den Quaternionisten, den Vertretern der Graßmannschen Schule und Vektoranalytikern verschiedener Richtung wurde, außer über

---

1) Dies ist die charakteristische Gleichung des Zahlensystems. Vgl. S. 128. In Systemen, wo mehrere Multiplikationen vorkommen, muß bei Potenzen die Multiplikation angegeben werden, die verwendet werden soll. Zu diesem Zwecke sei das Multiplikationszeichen hinter den Potenzexponenten geschrieben.

2) In der Quaternionentheorie wird dieser Skalar durch das Funktionszeichen N gebildet und heißt Norm des Quaternions; zwecks späterer Verallgemeinerung ist hier ein anderer Name und ein anderes Zeichen eingeführt (vgl. S. 129). Ist ein Quaternion in den Einheiten der algebraischen Normalform des Systems geschrieben, so ist der zweite Skalar gleich dem Werte der Determinante der Koeffizienten der Einheiten.

Bezeichnungs- und Benennungsfragen, namentlich über folgende drei Fragen geführt[1]):

1. Über die Berechtigung der Identifizierung von Vektoren mit rechten Quaternionen, bzw. von Vektoren mit Bivektoren.
2. Über das + oder — Zeichen in den Quadraten der Einheiten (vgl. S. 47 f.).
3. Über die Berechtigung, die Teilmultiplikationen $\cdot$ und $\times$ als selbstständige Multiplikationen aufzufassen (vgl. S. 48).

Zur ersten Frage ist Folgendes zu bemerken. Bekanntlich definierte Hamilton einen Quaternion zunächst als Quotient zweier Vektoren.[2]) Den zu einem rechten Quaternion α gehörigen Vektor gleichen Betrages nannte er den Index des Quaternions:

$$(56)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = \mathrm{I}\alpha & (\mathrm{I} \text{ stimmt überein mit } \mathfrak{m}^{(1)}\cdot) \\ \alpha = \mathrm{I}^{-1}\mathfrak{a} & (\mathrm{I}^{-1} \text{ „ „ „ } \mathfrak{m}^{(2)}\cdot). \end{cases}$$

Das Produkt zweier Vektoren wurde nun von ihm definiert als das Produkt der rechten Quaternionen, deren Indizes die Vektoren sind[3]), also in unserer Schreibweise, bei Unterdrückung des Zeichens $\dashv$:

$$(57)\qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\mathfrak{m}^{(2)}\cdot\mathfrak{a})(\mathfrak{m}^{(2)}\cdot\mathfrak{b}).$$

Damit identifizierte er Bivektoren mit rechten Quaternionen. Da aber schon feststand, daß auch:

$$(58)\qquad \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{m}^{(2)}\cdot\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}^{(2)}\cdot\mathfrak{b}}$$

war, lag es nahe, den rechten Quaternion auch mit dem zugehörigen Vektor zu identifizieren. Von Hamilton geschah dies zunächst[4]) als „symbolical identification“, die Gleichsetzung wurde aber später, namentlich von seinen Schülern, als eine vollkommene angesehen. Und mit Recht. Gleichsetzungen sind überhaupt nie absolut, sondern gelten nur innerhalb der Grenzen, die bei ihrer Aufstellung angegeben oder stillschweigend angenommen sind. Wer die Gleichung:

$$\log.\text{nat.}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

ausschreibt, weiß, daß die Grenzen ihrer Gültigkeit gegeben sind durch die Bedingung:

$$|x| < 1,$$

---

1) 85. 1; 91. 2, 3, 4; 92. 1, 2, 3, 4, 5, 6; 93. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 96. 2, 3; 02. 1; 03. 1, 3; 04. 1, 2, 3, 4, 5; 05. 1, 2, 5; 06. 3; 07. 3, 4, 5; 08. 1, 2, 3, 4, 5; 09. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 16, 17, 22; 10. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 11. 1, 2, 3, 4, 5; 12. 1, 2, 3; 13. 1, 2.

2) 66. 1, Book I und II.

3) 66. 1, Book III, Chapter I, Section I, S. 302, Section 3, S. 308.

4) 66. 1, Book III, Chapter Section IV, I, S. 311.

innerhalb dieser Grenzen ist sie aber vollständig richtig. Ebenso ist, solange uns der Unterschied zwischen e, E und ε nicht interessiert, wie das für einen großen Teil der mathematischen Physik der Fall ist, die Gleichung

(50) $$\mathfrak{e} = \mathbf{E} = \varepsilon = \mathfrak{i}$$

richtig, und zwar absolut richtig, da sie der Ausdruck dafür ist, daß wir zu dem Gattungsbegriff aufgestiegen sind, und jetzt nur noch die allgemeinen Eigenschaften der Gattung, aber nicht mehr die spezifischen der einzelnen Arten betrachten wollen. Sobald wir jedoch diese spezifischen Eigenschaften der Geraden, Ebenen und Winkel in die Betrachtung mit hineinziehen, d. h. auch spezielle affine Transformationen zulassen, darf die Gleichung nicht mehr verwendet werden.

Die Begründung, die die Hamiltonsche Schule von dieser Identifizierung gab, war wenig befriedigend, und hat daher von Anfang an Widerspruch erregt. M. O'Brien[1]), ein Vorläufer der vektoranalytischen Schule, der unabhängig von Graßmann die beiden Teile der Multiplikation $\dashv$ als selbständige Multiplikationen erkannt hatte, schrieb für drei senkrechte Einheitsvektoren nicht:

(Teil von 51) $$\mathfrak{i}_1 \times \mathfrak{i}_2 = \mathfrak{i}_3 = -\mathfrak{i}_2 \times \mathfrak{i}_1, \quad \text{cycl.},$$

aber:

(59) $$D(\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2) = \mathfrak{e}_3 = -D(\mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_1), \quad \text{cycl.},^2)$$

und stimmte auch hierin vollständig mit der Graßmannschen Auffassung:

(60) $$|[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2] = \mathfrak{e}_3 = -|[\mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_1], \quad \text{cycl.}$$

überein. Dabei bemerkte er, daß $D\mathfrak{e}_1 \times$ als Operation gefaßt gleich $-^{\frac{1}{2}}$ war, weigerte sich aber $D\mathfrak{e}_1$ mit $\mathfrak{e}_1$ zu identifizieren, und führte für das Produkt gleichgerichteter e das + Zeichen ein:

(61) $$\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_1 = +1 \quad \text{cycl.},$$

gleichwohl hinzusetzend:

> „though, as regards the last three relations, all that I have a right to assert as a matter of necessity is that
>
> $$\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_3 \cdot \mathfrak{e}_3.\text{“}$$

Auch A. Macfarlane[3]) wollte den Unterschied zwischen Einheitsvektoren und rechten Versoren bestehen lassen, und zwar in ähnlicher Weise. Rechte Versoren schrieb er:

---

1) 52. 1 S. 161.

2) O'Brien verwendete · statt ×, × statt ·, und α, β, γ statt $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$; der größeren Übersichtlichkeit halber sind seine Formeln in der Notation wiedergegeben, die in diesem Buch allgemein verwendet ist.

3) 93. 1, 7; 96. 1; 04. 3; 05. 5; 10. 2.

$$\mathbf{i}_1^{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{cycl.}^{1)},$$

und gab ihre Multiplikationsregeln wie folgt an:

$$(62) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i}_1^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{i}_1^{\frac{\pi}{2}} = - \\ \mathbf{i}_1^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{i}_2^{\frac{\pi}{2}} = - \mathbf{i}_2^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{i}_1^{\frac{\pi}{2}} = - \mathbf{i}_3^{\frac{\pi}{2}} \end{array} \right\} \quad \text{cycl.,}$$

wobei die Vektoren $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ den Bedingungen

$$(63) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 = + \\ \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 = - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_3 \end{array} \right\} \quad \text{cycl.}$$

genügen sollten. Er meinte, daß die

„fundamental rules for vectors are based on physical considerations, the principal one of which is that the square of a vector is essentially positive, where as, according to quaternionists, it is essentially negative" (vgl. S. 47f.).

und stellte den Grundsatz auf, daß Vektoren „vectorially", Versoren aber „versorially" behandelt werden müssen.

In ähnlicher Weise haben später die Bivektorianer der Graßmannschen Schule gegen die Identifizierung von Vektoren und Bivektoren durch die Monovektorianer Gibbsscher Richtung Einspruch erhoben. R. Mehmke[2]) hat, ausgehend von der Tatsache, daß

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

bei Gibbs eigentlich zwei Operationen enthält, erstens die Bildung eines Parallelogramms, die invariant ist bei affinen Transformationen und zweitens die Errichtung eines senkrechten Vektors, die bloß invariant ist bei orthogonalen Transformationen, es sogar für unwissenschaftlich erklärt, diese beiden Operationen nicht auseinanderzuhalten:

„Diese Tatsache muß einem jeden Mathematiker die Überzeugung aufdrängen, daß, vom wissenschaftlichen Standpunkt betrachtet, es durchaus notwendig ist, beide Operationen zu trennen."

L. Prandtl[3]), der drei Richtungen in der Vektoranalysis unterscheidet, eine geometrische oder deutsch-italienische (Graßmannsche Schule, Vektoren und Bivektoren), eine trigonometrische (Hamilton, Macfarlane, Vektoren und Quaternionen) und eine physikalische (Heaviside, Gibbs, Vektoren, Bivektoren und rechte Quaternionen identifiziert) hat dagegen

1) Macfarlane gebrauchte i, j, k statt $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, und $\mathbf{i}_3$.
2) 04. 2. 3) 04. 4.

richtig bemerkt, daß die theoretische Physik sich nicht mit affinen Transformationen der Koordinaten abgibt, und daß es für eine physikalische Größe gar keinen Sinn hat zu fragen, ob dieselbe ein Vektor oder Bivektor (wir fügen zu: oder rechter Quaternion) ist.

C. Burali Forti und R. Marcolongo,[1]) Vertreter der Graßmann-Peanoschen Richtung, haben eingesehen, daß es für gewisse Zwecke dienlich ist, das vollständige Graßmannsche System mit Vektoren und Bivektoren durch ein Einfacheres zu ersetzen. Dieses Einfachere, das sie „Minimumsystem" nennen, und das bis auf einige Änderungen der Notation und der Hinzufügung der gewöhnlichen komplexen Zahlen mit geometrischer Deutung, mit dem Gibbsschen identisch ist, identifiziert also Vektoren, Bivektoren und rechte Quaternionen. Es ist daher sehr auffallend, wie gerade diese Autoren der Hamiltonschen Schule die Identifizierung der Vektoren und rechten Quaternionen vorwerfen, und bei Vergleichen mit dem Hamiltonschen System immer die „vollständigen" Ausdrücke:

$$S(I^{-1}\mathfrak{a})(I^{-1}\mathfrak{b})$$
$$V(I^{-1}\mathfrak{a})(I^{-1}\mathfrak{b})$$

heranziehen, statt:

$$S\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$$
$$V\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b},$$

die nach ihnen bloß „verkürzt" sind und nicht als vollwertige Notationen gelten können. Höchstens lassen sie noch eine symbolische Identifikation zu:

„Mais il y a un abîme entre 'identification symbolique' et 'identification absolue'. On peut identifier deux symboles différents pour *abréger l'écriture*; cela peut conduire a des erreurs, mais ce n'est point une erreur logique. Au contraire, l'identification absolue de deux entités différentes est une faute logique que rien ne peut justifier.

Hamilton répète toujours le mot 'symbolical identification' qui semble dire 'prenez garde'. Précaution inutile! Les vulgarisateurs de la magistrale oeuvre de Hamilton, à la 'suppression symbolique' de I et I^{-1}, ont substitué la 'suppression absolue' des operateurs I, I^{-1}; à la 'symbolical identification' des vecteurs aux quaternions droits ont remplacé leur 'identification absolue'.

Les vulgarisateurs de Hamilton (et c'est à eux seulement qu'est due la confusion actuelle) ont montré bien peu de déférence à leur maitre, avec la suppression absolue, des symboles I, I^{-1}! Ne point les comprendre n'est pas une raison suffisante pour les supprimer".[2])

1) 07. 3, 4, 5; 08. 2, 3, 4; 09. 1, 4, 10, 11; 10. 3, 4, 5, 8; 11. 1.
2) 10. 4 S. 50.

Wo Burali Forti und Marcolongo selbst in ihrem Minimumsystem Vektoren und Bivektoren identifizieren, kann man diese Ausführungen schwerlich anders als inkonsequent nennen, abgesehen noch von dem logischen Fehler, den diese Autoren begehen, indem sie den relativen Charakter einer jeden Gleichsetzung[1]) und die logische Berechtigung des Aufsteigens zum Gattungsbegriff verkennen.

Einige der wichtigsten Momente die den ersten Hauptstreitpunkt der verschiedenen Schulen betreffen, den Vorrang und die Identifizierung der Vektoren, Bivektoren oder Versoren, sind damit angegeben. Im Besitze des umfassenden Systems in e, E und ε erscheint uns jetzt das Entstehen dieses Streites begreiflich, die ihm zugrunde liegende Frage aber leicht zu beantworten. Zunächst war jedes der bisherigen Systeme verkürzt, konnte also nie das ganze Gebiet beherrschen. Wo dies doch geschehen sollte, entstand notwendig Streit, da sich kein anderes System umfassen lassen wollte, und auch nicht richtig umfaßt werden konnte. Legen wir aber das System in e, E und ε zugrunde, so kann jedes aus demselben dasjenige herausnehmen, was seinem Bedarf entspricht, und identifizieren, was für seinen augenblicklichen Zweck nicht unterschieden werden soll. So entsteht die Quaternionentheorie mit zerlegter Multiplikation vor der „symbolical identification" durch Identifizierung von E und ε, dieselbe Form der Quaternionentheorie nach dieser Identifizierung, oder die Vektoranalysis mit $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -1$ (siehe unten), durch gleichzeitige Identifizierung von e, E und ε, und die Ausdehnungslehre für drei Dimensionen, wie wir noch sehen werden, durch die Herausnahme eines der Teile der in anderer Weise zerlegten totalen Multiplikation (vgl. S. 52). Das System in e, E und ε selbst aber erscheint als das Umfassende, in dem sich alle Teile widerspruchslos vereinen.

Die Beziehungen des Systems zur Gibbsschen Vektoranalysis. Die zweite und dritte der S. 43 erwähnten Hauptfragen treten zutage bei Betrachtung der Beziehungen des Systems zur Vektoranalysis. So wie das System jetzt vorliegt, mit algebraisch zerlegter Multiplikation,

---

1) Burali Forti und Marcolongo schreiben geradezu:

„C'est un principe fondamental de logique mathématique que $x = y$ signifie: toute propriété de x est aussi propriété de y" (11. 1),

während doch diese Gleichsetzung nichts anderes zu bedeuten hat als: jede Eigenschaft von x, die innerhalb der Grenzen der gerade vorliegenden Untersuchung Bedeutung hat, ist eben innerhalb dieser Grenzen und innerhalb noch anderer Grenzen, die man eventuell bei der Gleichsetzung angegeben oder über die stillschweigend übereingekommen ist, auch eine Eigenschaft von y. Vgl. Graßmann 44. 1 S. 25 und 33; Whitehead 98. 1 S. 5f.

unterscheidet es sich von dem der Gibbsschen Vektoranalysis nur dadurch, daß dort

$$\mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{i}_1 = +1, \quad \text{cycl.} \tag{64}$$

ist und daß die Multiplikation von Skalaren unter sich und mit Vektoren nicht mit der skalaren Multiplikation · identifiziert wird. Um die Bedeutung dieses + Zeichens zu erklären, ist zunächst hervorzuheben, daß bei den physikalischen Anwendungen, die sich nur auf das eigentliche Gebiet der Vektoranalysis, also ohne Dyaden- und Tensorenrechnung, beziehen, das totale Produkt $\divideontimes$ fast nie vorkommt, man also fast immer zu tun hat mit · und ×, und daß es auch in vereinzelten Fällen, wo in der Tat die Multiplikation $\divideontimes$ Nutzen bringen würde, auch sehr wohl möglich ist, mit · und × auszukommen. Dies hängt damit zusammen, daß es innerhalb dieses Gebietes keine physikalischen Größen gibt, die aus einem Skalar und einem Vektor zusammengesetzt sind. Das assoziative Gesetz, das bei der Änderung des Zeichens verloren geht, wie man z. B. an den Produkten

$$\left.\begin{array}{l}(\mathfrak{i}_1 \divideontimes \mathfrak{i}_1) \divideontimes \mathfrak{i}_2 = +\mathfrak{i}_2 \\ \mathfrak{i}_1 \divideontimes (\mathfrak{i}_1 \divideontimes \mathfrak{i}_2) = -\mathfrak{i}_2\end{array}\right\} \quad \mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{i}_1 = +1, \quad \text{cycl.}$$

sehen kann, hat also hier wenig praktische Bedeutung, und es ist daher von vornherein einzusehen, daß das — Zeichen dem Vektoranalytiker wenig unmittelbaren Nutzen bringen kann. Obwohl nun andererseits die Analysis durch Einführung des + Zeichens nicht gewinnt, sich dagegen bei Beibehaltung des — Zeichens viel symmetrischer (vgl. S. 41) gestaltet, und sich auch besser den Tatsachen der Mechanik anschließt (vgl. S. 190ff. und 214), so haben doch die Urheber der Vektoranalysis, als sie den Schritt zur Anerkennung der beiden Teile des Quaternionprodukts als selbständige multiplikative Verknüpfungen taten, gleichzeitig, und im Grunde ganz unabhängig davon, das — Zeichen in ein + Zeichen verwandelt. Der eigentliche Grund ist dabei der gewesen, daß das — Zeichen in den Grundregeln, dessen Bedeutung in der eigentlichen Vektoranalysis nicht sofort zutage tritt, dem Anfänger unerklärlich bleibt, ihm daher unbequem scheint, und so nicht geeignet erscheint, die Popularität der neuen Rechnungsweise zu fördern.

In dem Streite zwischen den verschiedenen Schulen ist immer die Zeichenfrage zusammen mit der Frage nach der Selbständigkeit der beiden Teilmultiplikationen · und × behandelt, und es ist dabei nirgends scharf zutage getreten, daß diese beiden Fragen ganz unabhängig voneinander sind. Diese Unabhängigkeit aber soll hier ausdrücklich betont werden, da der Verfasser die Selbständigkeit der Multiplikationen · und ×, und sogar noch anderer, die im zweiten Kapitel auftreten werden, durchaus anerkennt, und es für einen überaus großen Verdienst der Begründer der

Vektoranalysis hält, dies auch in den Notationen zum Ausdruck gebracht zu haben, sich aber was die Zeichenfrage betrifft, auf folgenden Standpunkt stellen möchte.

Solange man auf dem Gebiet der eigentlichen Vektoranalysis bleibt, Größen höherer Ordnung also nicht betrachtet, ist das Zeichen, was die praktische Rechnung betrifft, unwichtig. Die Analysis bleibt, wenn man von einigen Asymmetrien absehen will, die allerdings besser zu vermeiden wären, in beiden Fällen gleich brauchbar, und das — Zeichen in den Voraussetzungen hat, seiner scheinbar größeren Einfachheit wegen, für die Einführung einen gewissen Vorzug. Nun ist es aber für den richtigen Aufbau der Infinitesimalrechnung der Vektoranalysis selbst durchaus notwendig, zur Betrachtung von Größen zweiter Ordnung überzugehen. Tun wir dies jedoch, und suchen wir eine Analysis aufzubauen, die als das System der geometrischen Größen bis zur zweiten Ordnung zu betrachten ist, in derselben Weise wie das System in **m** und **i** das System für die Größen erster Ordnung ist, so ist die Frage des Zeichens nicht mehr gleichgültig. Es wird sich im zweiten Kapitel zeigen, daß dann in der Tat das — Zeichen unbedingt vorzuziehen ist. Mit dem + Zeichen ist also die Vektoranalysis zwar ein für die praktischen Zwecke der Rechnung schon recht brauchbares Instrument, sie enthält aber unnötige Asymmetrien und steht nicht im organischen Zusammenhang mit den Systemen höherer Ordnung. Mit dem — Zeichen dagegen gestaltet sie sich vollkommen symmetrisch, wodurch sich ihre praktische Brauchbarkeit noch erhöht, und bildet sie das erste Glied einer genau angebbaren Reihe von Analysen, die sich mit Größen bis zu beliebiger Ordnung befassen, und die alle im engsten Zusammenhang stehen. Einerseits ist dies nun allerdings sehr bedauerlich, da nun einmal das + Zeichen in der Vektoranalysis das Bürgerrecht erworben hat, andererseits erwachsen aber dem Vektoranalytiker beim Übergang zum — Zeichen doch keine nennenswerten Schwierigkeiten, da alle seine Formeln sich ohne jegliche Rechnung so lesen lassen, als wenn das — Zeichen zugrunde gelegt wäre.

Da in der Gibbschen Vektoranalysis die beiden Multiplikationen und × nur gesondert betrachtet werden und die nicht assoziative totale Multiplikation ⨯ hier keine Bedeutung hat, ist es deutlich, daß die Identifizierung der Multiplikation von Skalaren unter sich und mit Vektoren mit der Multiplikation ·, die sich bei Ableitung aus einer totalen Multiplikation, wie auf S. 40 gezeigt, von selbst ergibt, in diesem System nicht zustande kommen konnte. Diese Identifizierung ist aber, wie sich zeigen wird, für die einwandfreie Gestaltung einer Vektoranalysis besonders wichtig, und es spricht also auch dieser Umstand zugunsten des assoziativen Systems mit $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -1$.

Die geometrische Zerlegung der totalen Multiplikation. Die Zerlegung der invarianten Multiplikation $\dashv$ in $\cdot$ und $\times$ ist für viele Zwecke gut brauchbar, es gibt aber noch eine andere, die sich für manche geometrische Untersuchungen besser eignet.

In einem System für 3 Richtungen besteht eine Analogie zwischen den beiden Produktbildungen:

$$e_1 \dashv e_2$$
$$(e_1 \dashv e_2) \dashv e_3.$$

Erstere führt von Strecke zu Quadrat, letztere von Quadrat zu Würfel, also jedesmal in ähnlicher Weise zur Ausdehnungsgröße nächsthöherer Dimensionenzahl. Diese Produktbildungen weisen also eine innere Gemeinschaft auf, die aber bei der algebraischen Trennung der Multiplikation $\dashv$ nicht zum Ausdruck kommt. Denn diese schreibt:

$$e_1 \times e_2$$
$$(e_1 \times e_2) \cdot e_3,$$

nennt also die erste Multiplikation vektorisch, die zweite skalar. Wir gelangen nun aber zu einer anderen Zerlegung von $\dashv$, wenn wir die Größen folgendermaßen in Klassen einteilen. Die Ausdehnungsgrößen, das sind die Größen, die speziellen affinen Transformationen standhalten, und die sich, wenn sie einfach sind, zusammenstellen lassen aus den Einheiten:

$$\left.\begin{array}{l} e_1 \\ e_1 \dashv e_2 = E_3 \\ e_1 \dashv e_2 \dashv e_3 = -m \end{array}\right\} \text{cycl.},$$

die nur verschiedene Faktoren e besitzen, formen die erste Klasse. Die anderen Größen, deren Einheiten sich aus denen der Größen erster Klasse durch Multiplikation mit oder Division durch $m^{(2)} = -e_1 \dashv e_1$ ableiten, bilden die zweite Klasse. (Für $n > 3$ werden in ähnlicher Weise mehrere Klassen gebildet, vgl. S. 58.) Nun zerlegen wir $\dashv$ so in $\underset{1}{\dashv}$ und $\underset{2}{\dashv}$[1]), daß in jedem Produkt zweier Faktoren $\underset{1}{\dashv}$ die Teile der ersten, $\underset{2}{\dashv}$ die der zweiten Klasse bildet. Die Multiplikationen $\underset{1}{\dashv}$ und $\underset{2}{\dashv}$ sind offenbar wiederum invariant bei Drehungen des Bezugssystems, und wir nennen diese Zerlegung, im Gegensatz zur algebraischen, die *geometrische*.

---

1) Die Zeichen $\underset{1}{\dashv}$ und $\underset{2}{\dashv}$ sind hier nur verwendet, weil eben Zeichen nötig waren, ihre Verwendung ist also nicht als ein Vorschlag zu betrachten.

Das System für $n = 3$ erscheint jetzt in der Form:

Umgekehrt:

$$
(65)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\mathbf{m}^{(1)} \underset{1}{\dashv} \mathbf{e}_1 & = & \mathbf{E}_1 \\
\mathbf{m}^{(1)} \underset{2}{\dashv} \mathbf{E}_1 & = & \varepsilon_1 \\
\mathbf{m}^{(1)} \underset{1}{\dashv} \varepsilon_1 & = & \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{m}^{(2)} \underset{2}{\dashv} \mathbf{e}_1 & = & \varepsilon_1 \\
\mathbf{m}^{(2)} \underset{1}{\dashv} \mathbf{E}_1 & = & \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{m}^{(2)} \underset{1}{\dashv} \varepsilon_1 & = & \mathbf{E}_1 \\
\mathbf{m} \underset{1}{\dashv} \mathbf{e}_1 & = & \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{m} \underset{1}{\dashv} \mathbf{E}_1 & = & \mathbf{E}_1 \\
\mathbf{m} \underset{2}{\dashv} \varepsilon_1 & = & \varepsilon_1 \\
\mathbf{m}^{(1)} \underset{2}{\dashv} \mathbf{m}^{(1)} & = & \mathbf{m}^{(2)} \\
\mathbf{m}^{(1)} \underset{1}{\dashv} \mathbf{m}^{(2)} & = & \mathbf{m} \\
\mathbf{m}^{(1)} \underset{2}{\dashv} \mathbf{m} & = & \mathbf{m}^{(1)} \\
\mathbf{m}^{(2)} \underset{2}{\dashv} \mathbf{m}^{(2)} & = & \mathbf{m}^{(1)} \\
\mathbf{m}^{(2)} \underset{2}{\dashv} \mathbf{m} & = & \mathbf{m}^{(2)} \\
\mathbf{m} \underset{1}{\dashv} \mathbf{m} & = & \mathbf{m}
\end{array}\right\}\text{Komm.}\quad
\left.\begin{array}{llll}
\mathbf{e}_1 \underset{1}{\dashv} \mathbf{e}_2 & = & \mathbf{E}_3 & -\mathbf{E}_3 \\
\mathbf{e}_1 \underset{2}{\dashv} \mathbf{e}_1 & = & -\mathbf{m}^{(2)} & -\mathbf{m}^{(2)} \\
\mathbf{e}_1 \underset{2}{\dashv} \mathbf{E}_2 & = & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \\
\mathbf{e}_1 \underset{1}{\dashv} \mathbf{E}_1 & = & -\mathbf{m} & -\mathbf{m} \\
\mathbf{e}_1 \underset{1}{\dashv} \varepsilon_2 & = & \mathbf{e}_3 & -\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_1 \underset{2}{\dashv} \varepsilon_1 & = & -\mathbf{m}^{(1)} & -\mathbf{m}^{(1)} \\
\mathbf{E}_1 \underset{2}{\dashv} \mathbf{e}_2 & = & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \\
\mathbf{E}_1 \underset{1}{\dashv} \mathbf{E}_3 & = & \mathbf{e}_3 & -\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{E}_1 \underset{2}{\dashv} \mathbf{E}_1 & = & -\mathbf{m}^{(1)} & -\mathbf{m}^{(1)} \\
\mathbf{E}_1 \underset{1}{\dashv} \varepsilon_2 & = & \mathbf{E}_3 & -\mathbf{E}_3 \\
\mathbf{E}_1 \underset{2}{\dashv} \varepsilon_1 & = & -\mathbf{m}^{(2)} & -\mathbf{m}^{(2)} \\
\varepsilon_1 \underset{1}{\dashv} \mathbf{e}_2 & = & \mathbf{e}_3 & -\mathbf{e}_3 \\
\varepsilon_1 \underset{1}{\dashv} \mathbf{E}_2 & = & \mathbf{E}_3 & -\mathbf{E}_3 \\
\varepsilon_1 \underset{2}{\dashv} \varepsilon_2 & = & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \\
\varepsilon_1 \underset{1}{\dashv} \varepsilon_1 & = & -\mathbf{m} & -\mathbf{m}
\end{array}\right\}\text{cycl.}
$$

Multiplikative Verknüpfungen, die nicht angegeben sind, ergeben Null.

Es ist ganz besonders hervorzuheben, daß, im Gegensatz zur algebraischen Zerlegung, bei der geometrischen Zerlegung die rotationale Orientierung eines Produktes sich nicht auf allen Stufen gleich zu den rotationalen Orientierungen der Faktoren verhält. So ergibt sich z. B. in:

$$\mathbf{e}_1 \underset{1}{\dashv} \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_3$$

eine Größe erster Ordnung als Produkt zweier Größen derselben Art, während in

$$\mathbf{e}_1 \underset{1}{\dashv} \mathbf{E}_2 = -\mathbf{m}$$

zwei Größen mit derselben rotationalen Orientierung einen Skalar erzeugen. Beim Übergang zu dem System in $\mathbf{m}$ und $\mathbf{i}$, wo alle Größen gleicher rotationaler Orientierung bis auf einen Zahlenfaktor identifiziert werden, kann also die geometrische Zerlegung von $\dashv$ nicht wie die algebraische bestehen bleiben (vgl. S. 40), und dieser Umstand erklärt zum Teil den Mangel an Übereinstimmung zwischen den Vektoranalytikern und den Vertretern der Graßmannschen Schule. Das umfassende System in $\mathbf{e}$, $\mathbf{E}$, ε, $\mathbf{m}^{(1)}$, $\mathbf{m}^{(2)}$ und $\mathbf{m}$ bringt auch hier die Lösung, es sind eben zwei vollkommen gleichberechtigte Zerlegungsweisen möglich, und, indem man diese durch den Gebrauch verschiedener Bezeichnungen scharf auseinander hält, ist jeder Widerspruch ausgeschlossen.

Die Beziehungen des Systems zur Graßmannschen Ausdehnungslehre. Ausgehend von $\mathbf{e}$ und $\mathbf{E}$ gelangt man durch die Multiplikation $\underset{1}{\dashv}$ nur zu $\mathbf{m}$, niemals zu ε, $\mathbf{m}^{(1)}$ und $\mathbf{m}^{(2)}$. $\mathbf{e}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{m}$ bilden also mit $\underset{1}{\dashv}$ ein Untersystem. Dieses Untersystem, das nur Ausdehnungsgrößen enthält, stimmt aber bis auf das Zeichen von $\mathbf{m}$ genau mit der äußeren Multiplikation freier Ausdehnungsgrößen überein, die Graßmann bezeichnet mit [ ]:

	Umgekehrt:		Umgekehrt:
$\mathbf{e}_1 \underset{1}{\dashv} \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_3$	$-\mathbf{E}_3$	$[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] = \mathbf{E}_3$	$-\mathbf{E}_3$
$\mathbf{E}_1 \underset{1}{\dashv} \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_3$	$[\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2] = \mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1 \underset{1}{\dashv} \mathbf{E}_1 = -\mathbf{m}$	$-\mathbf{m}$	$[\mathbf{e}_1 \mathbf{E}_1] = 1$	1

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{m} \underset{1}{\dashv} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{m} \underset{1}{\dashv} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{m} \underset{1}{\dashv} \mathbf{m} &= \mathbf{m} \end{aligned}\right\} \text{Kommutativ.}$$

Zahlen sind bei Graßmann Größen n^{ter} oder nullter Stufe.

Dieses System ist offenbar nicht nur invariant bei Drehungen, sondern auch bei speziellen affinen Transformationen, und eben dieser Invarianz, verdankt es seine Bedeutung.[1]) Das System entsteht aus dem assoziativen durch Ausmerzung derjenigen Größen, die speziellen affinen Transformationen nicht standhalten. Wir wären sofort zu ihm gelangt, wenn wir in Regel I statt der Gruppe der Drehungen die Gruppe der speziellen affinen Transformationen eingeführt und so die Betrachtung von vornherein auf die Ausdehnungsgrößen beschränkt hätten (vgl. S. 59).

Daß die Ausdehnungslehre Graßmanns für $n = 3$, sofern sie sich mit freien Ausdehnungsgrößen befaßt, ein Teil des assoziativen Systems für dieselbe Richtungszahl ist, ist hiermit eigentlich schon klargestellt, da ja die innere Multiplikation sich aus der äußeren ableitet, indem man für den zweiten Faktor seine Ergänzung einführt. Diese innere Multiplikation steht aber in einer merkwürdigen Beziehung zu den auf die Einheiten bezogenen Regeln der zu $\dashv$ gehörigen beiden Divisionen. Die Beziehung sei hier noch angegeben. Dazu werde eine allgemeine Eigenschaft der nicht kommutativen Multiplikationen ohne Teiler der Null herangezogen. Ist $\dashv$ eine solche Multiplikation und definiert man die Verknüpfungen $\dashv\!|$ und $\dashv\!\|$ durch:

$$(66) \qquad \begin{cases} \Phi \dashv \Psi = \Omega \\ \Psi \dashv\!| \; \Omega = \Phi \\ \Omega \dashv\!\| \; \Phi = \Psi, \end{cases}$$

dann sind $\dashv\!|$ und $\dashv\!\|$ ebenfalls eindeutige Verknüpfungen, die aber nicht

1) Vgl. F. Engel und E. Study, 94. 1, S. 406.

mehr als Multiplikationen sondern als Divisionen aufgefaßt werden müssen, da $\dashv\!\Vert$ nur nach · und $\dashv\!\Vert\!|$ nur vordistributiv der Addition gegenüber ist. $\dashv\!\Vert$ und $\dashv\!\Vert\!|$ brauchen nicht assoziativ zu sein oder einen Modulus zu haben. Im übrigen ist zwischen $\dashv$, $\dashv\!\Vert$ und $\dashv\!\Vert\!|$ kein Unterschied vorhanden, namentlich verhält sich $\dashv$ zu $\dashv\!\Vert$ und $\dashv\!\Vert\!|$ wie $\dashv\!\Vert$ zu $\dashv\!\Vert\!|$ und $\dashv$ und wie $\dashv\!\Vert\!|$ zu $\dashv$ und $\dashv\!\Vert$. In derselben Weise wie $\dashv$ können $\dashv\!\Vert$ und $\dashv\!\Vert\!|$ gemäß den Regeln auf S. 50, geometrisch zerlegt werden. Da das System in $\mathbf{e}$, $\mathbf{E}$, ε, $\mathbf{m}^{(1)}$, $\mathbf{m}^{(2)}$ und $\mathbf{m}$ keine einfachen Größen als Teiler der Null enthält, lassen sich Multiplikationen $\dashv\!\Vert$ und $\dashv\!\Vert\!|$ angeben; ihre Formeln, bei geometrischer Zerlegung, lauten:

(67)

	$\dashv$	Umgek.:		$\dashv\!\Vert$	Umgek.:		$\dashv\!\Vert\!|$	Umgek.:
$e_1 \underset{1}{\dashv} e_2 =$	E_3	$-E_3$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert}$	ε_3	$-\varepsilon_3$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert\!|}$	ε_3	$-\varepsilon_3$
$e_1 \underset{2}{\dashv} e_1 =$	$-m^{(2)}$	$-m^{(2)}$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	m	m	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	m	m
$e_1 \underset{2}{\dashv} E_2 =$	ε_3	$-\varepsilon_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	e_3	$-E_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	E_3	$-e_3$
$e_1 \underset{1}{\dashv} E_1 =$	$-m$	$-m$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert}$	$m^{(1)}$	$m^{(2)}$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert\!|}$	$m^{(2)}$	$m^{(1)}$
$e_1 \underset{1}{\dashv} \varepsilon_2 =$	e_3	$-e_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	E_3	$-e_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	e_3	$-E_3$
$e_1 \underset{2}{\dashv} \varepsilon_1 =$	$-m^{(1)}$	$-m^{(1)}$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert}$	$m^{(2)}$	$m^{(1)}$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert\!|}$	$m^{(1)}$	$m^{(2)}$
$E_1 \underset{2}{\dashv} e_2 =$	ε_3	$-\varepsilon_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	E_3	$-e_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	e_3	$-E_3$
$E_1 \underset{1}{\dashv} E_2 =$	e_3	$-e_3$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert}$	ε_3	$-\varepsilon_3$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert\!|}$	ε_3	$-\varepsilon_3$
$E_1 \underset{2}{\dashv} E_1 =$	$-m^{(1)}$	$-m^{(1)}$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	m	m	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	m	m
$E_1 \underset{1}{\dashv} \varepsilon_2 =$	E_3	$-E_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	e_3	$-E_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	E_3	$-e_3$
$E_1 \underset{2}{\dashv} \varepsilon_1 =$	$-m^{(2)}$	$-m^{(2)}$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert}$	$m^{(1)}$	$m^{(2)}$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert\!|}$	$m^{(2)}$	$m^{(1)}$
$\varepsilon_1 \underset{1}{\dashv} e_2 =$	e_3	$-e_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	e_3	$-E_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	E_3	$-e_3$
$\varepsilon_1 \underset{1}{\dashv} E_2 =$	E_3	$-E_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	E_3	$-e_3$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	e_3	$-E_3$
$\varepsilon_1 \underset{2}{\dashv} \varepsilon_2 =$	ε_3	$-\varepsilon_3$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert}$	ε_3	$-\varepsilon_3$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert\!|}$	ε_3	$-\varepsilon_3$
$\varepsilon_1 \underset{1}{\dashv} \varepsilon_1 =$	$-m$	$-m$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	m	m	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	m	m
$m^{(1)} \underset{1}{\dashv} e_1 =$	E_1	E_1	$\underset{2}{\dashv\!\Vert}$	ε_1	$-\varepsilon_1$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert\!|}$	ε_1	$-\varepsilon_1$
$m^{(1)} \underset{2}{\dashv} E_1 =$	ε_1	ε_1	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	e_1	$-E_1$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	E_1	$-e_1$
$m^{(1)} \underset{1}{\dashv} \varepsilon_1 =$	e_1	e_1	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	E_1	$-e_1$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	e_1	$-E_1$
$m^{(2)} \underset{2}{\dashv} e_1 =$	ε_1	ε_1	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	E_1	$-e_1$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	e_1	$-E_1$
$m^{(2)} \underset{1}{\dashv} E_1 =$	e_1	e_1	$\underset{2}{\dashv\!\Vert}$	ε_1	$-\varepsilon_1$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert\!|}$	ε_1	$-\varepsilon_1$
$m^{(2)} \underset{1}{\dashv} \varepsilon_1 =$	E_1	E_1	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	e_1	$-E_1$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	E_1	$-e_1$
$m \underset{1}{\dashv} e_1 =$	e_1	e_1	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	e_1	$-E_1$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	E_1	$-e_1$
$m \underset{1}{\dashv} E_1 =$	E_1	E_1	$\underset{1}{\dashv\!\Vert}$	E_1	$-e_1$	$\underset{1}{\dashv\!\Vert\!|}$	e_1	$-E_1$
$m \underset{2}{\dashv} \varepsilon_1 =$	ε_1	ε_1	$\underset{2}{\dashv\!\Vert}$	ε_1	$-\varepsilon_1$	$\underset{2}{\dashv\!\Vert\!|}$	ε_1	$-\varepsilon_1$

(67)

	$\dashv$	Umgek.:		$\dashv\!\mid$	Umgek.:		$\dashv\!\mid\!\mid$	Umgek.:
$m^{(1)} \underset{2}{\dashv} m^{(1)} =$	$m^{(2)}$	$m^{(2)}$	$\underset{1}{\dashv\!\mid}$	m	m	$\underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid}$	m	m
$m^{(1)} \underset{1}{\dashv} m^{(2)} =$	m	m	$\underset{2}{\dashv\!\mid}$	$m^{(1)}$	$m^{(2)}$	$\underset{2}{\dashv\!\mid\!\mid}$	$m^{(2)}$	$m^{(1)}$
$m^{(1)} \underset{2}{\dashv} m =$	$m^{(1)}$	$m^{(1)}$	$\underset{2}{\dashv\!\mid}$	$m^{(2)}$	$m^{(1)}$	$\underset{2}{\dashv\!\mid\!\mid}$	$m^{(1)}$	$m^{(2)}$
$m^{(2)} \underset{2}{\dashv} m^{(2)} =$	$m^{(1)}$	$m^{(1)}$	$\underset{1}{\dashv\!\mid}$	m	m	$\underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid}$	m	m
$m^{(2)} \underset{2}{\dashv} m =$	$m^{(2)}$	$m^{(2)}$	$\underset{2}{\dashv\!\mid}$	$m^{(1)}$	$m^{(2)}$	$\underset{2}{\dashv\!\mid\!\mid}$	$m^{(2)}$	$m^{(1)}$
$m \underset{1}{\dashv} m =$	m	m	$\underset{1}{\dashv\!\mid}$	m	m	$\underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid}$	m	m

Ausgehend von e und E gelangt man durch die Verknüpfungen $\underset{1}{\dashv\!\mid}$ und $\underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid}$ nur zu m, niemals zu ε, $m^{(1)}$ oder $m^{(2)}$. e, E und m bilden also mit $\underset{1}{\dashv\!\mid}$ und mit $\underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid}$ je ein Untersystem. Diese Untersysteme stimmen nun aber, bis auf die Zeichen bei der Multiplikation von m mit Vektoren und Bivektoren überein mit der inneren Multiplikation:

$$[a \mid b],$$

bzw. der umgekehrten inneren Multiplikation:

$$[\mid a\, b],$$

die bei Graßmann nicht als besondere multiplikative Verknüpfung auftritt, der inneren Multiplikation aber genau koordiniert ist:

	Umgek.:		Umgek.:
$e_1 \underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid} e_1 = m$	m	$[e_1 \mid e_1] = 1$	1
$e_1 \underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid} E_2 = E_3$	$-e_3$	$[e_1 \mid E_2] = E_3$	$-e_3$
$E_1 \underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid} e_2 = e_3$	$-E_3$	$[E_1 \mid e_2] = e_3$	$-E_3$
$E_1 \underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid} E_1 = m$	m	$[E_1 \mid E_1] = 1$	1
$m \underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid} e_1 = E_1$	$-e_1$	$[1 \mid e_1] = E_1$	e_1 [1]
$m \underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid} E_1 = e_1$	$-E_1$	$[1 \mid E_1] = e_1$	E_1
$m \underset{1}{\dashv\!\mid\!\mid} m = m$	m	$[1 \mid 1] = 1$	1
$e_1 \underset{1}{\dashv\!\mid} e_1 = m$	m	$[\mid e_1 e_1] = 1$	1
$e_1 \underset{1}{\dashv\!\mid} E_2 = e_3$	$-E_3$	$[\mid e_1 E_2] = e_3$	$-E_3$
$E_1 \underset{1}{\dashv\!\mid} e_2 = E_3$	$-e_3$	$[\mid E_1 e_2] = E_3$	$-e_3$
$E_1 \underset{1}{\dashv\!\mid} E_1 = m$	m	$[\mid E_1 E_1] = 1$	1
$m \dashv\!\mid e_1 = e_1$	$-E_1$	$[\mid 1\, e_1] = e_1$	E_1
$m \dashv\!\mid E_1 = E_1$	$-e_1$	$[\mid 1\, E_1] = E_1$	e_1
$m \dashv\!\mid m = m$	m	$[\mid 1\; 1] = 1$	$1.$

1) Die Ergänzung der Zahl 1 ist die Zahl 1 selbst.

Die merkwürdige Asymmetrie der inneren Multiplikation, bei welcher sich auch die Stufe des Produkts bei Verwechslung der Faktoren ändern kann, eine Asymmetrie, die dem Graßmannschen System sogar vorgeworfen ist[1]), steht im engsten Zusammenhange mit den Beziehungen dieser Multiplikation zu einer Division, wo eine solche Stufenänderung sehr begreiflich ist. Die noch vorhandenen Unterschiede des Zeichens bei äußerer und innerer Multiplikation erklären sich dadurch, daß für die Ausdehnungslehre, wo keine Winkelgrößen betrachtet werden, und wo das assoziative Gesetz seine Bedeutung verloren hat, das — Zeichen keine Bedeutung hat, und der Begründer demnach von vornherein das hier einfachere + Zeichen annahm. Übrigens ist die Wahl dieses Zeichens für die Ausdehnungslehre ebensowenig wesentlich als für die Vektoranalyse. Es mag noch hervorgehoben werden, daß die Regeln der inneren Multiplikation nicht wie die der äußeren bei speziellen affinen Transformationen invariant sind, sondern nur bei Drehungen.[2])

Die Systeme der geometrischen Größen erster Ordnung in einem Punkt bei höherer Dimensionenzahl. Mit der Erzeugung des Systems für drei Dimensionen ist zugleich der einzuschlagende Weg bei mehreren Dimensionen angedeutet. Prinzipielle Schwierigkeiten treten dabei nicht mehr auf. Wo es sich, wie hier, nur um eine Andeutung handelt, kann man aber leichter von dem Systeme für drei Dimensionen ausgehen, und die Systeme für höhere Dimensionenzahlen diesem analog aufbauen. Dieser Weg sei hier kurz angegeben.

Man nehme in einem Punkte eines n-dimensionalen Raumes n unter sich senkrechte Einheitsmonovektoren oder Einheitsvektoren. Die Produkte zweier verschiedener Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_i$ und $\mathfrak{e}_j$ seien dem durch $\mathfrak{e}_i$ und $\mathfrak{e}_j$ bestimmten und mit einer bestimmten Drehrichtung ausgestatteten Einheitsquadrat oder Einheitsbivektor gleich. Es ist dann allgemein

(68) $$\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j = -\mathfrak{e}_j\mathfrak{e}_i, \qquad i,j = 1,\ldots,n,\ i \neq j$$ [3])

da die Drehrichtung bei Vertauschung der Faktoren umkehrt. In derselben Weise sei das Produkt $\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j\mathfrak{e}_k$ einem Einheitstrivektor gleich usw Der n-dimensionale Würfel $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_n$ heiße V. Er hat im n-dimensionalen Raume keine eigentliche Richtung mehr. Die Quadrate zweier Einheitsvektoren seien alle gleich:

(69) $$\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_i = \mathrm{k}^{(2)}. \qquad i = 1,\ldots,n.$$

1) Prandtl 04. 4, S. 443.

2) Vgl. 94. 1, S. 406.

3) Das Multiplikationszeichen sei einfachheitshalber unterdrückt.

Die einzige Bestimmungszahl von Größen in $\mathbf{k}^{(2)}$ ist invariant bei Drehungen des Bezugssystems. $\mathbf{k}^{(2)}$ ist daher ein Skalar. Soll unser System das Prinzip der Dualität richtig zum Ausdruck bringen, so muß, wenn:

(70) $$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \ldots \mathbf{e}_n,$$

usw., also:

(71) $$\mathbf{e}_i \mathbf{E}_i = \mathbf{V} \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ist, in derselben Weise für die $\mathbf{E}$ gelten:

(72) $$\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_3 \ldots \mathbf{E}_n$$

usw. Diesen Gleichungen wird offenbar genügt, wenn man für:

(73)
$$\begin{array}{lll} 3 \text{ Richtungen:} & \mathbf{V} = -\mathbf{m} & \\ 4 \quad \text{„} \quad : & \mathbf{V}^2 = -\mathbf{m} & \\ 5 \quad \text{„} \quad : & \mathbf{V}^3 = +\mathbf{m} & (\mathbf{m} = \text{Modulus}) \\ 6 \quad \text{„} \quad : & \mathbf{V}^4 = +\mathbf{m} & \\ 7 \quad \text{„} \quad : & \mathbf{V}^5 = -\mathbf{m} & \end{array}$$

setzt, oder allgemein,

(74) $$\mathbf{V}^{(n-2)} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \mathbf{m}.$$

Es ist zu beachten, daß für ungerades n gilt:

(75) $$\mathbf{V}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{V} \qquad i = 1, \ldots, n$$

für gerades n aber:

(76) $$\mathbf{V}\mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i \mathbf{V} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

In diesen Systemen gibt es Einheitsprodukte von $n(n-2)$ verschiedenen Stufen, wenn man die Stufe eines Produktes von p Vektoren als $p \bmod n(n-2)$ definiert. Die Potenzen von $\mathbf{k}^{(2)}$ lassen sich allgemein angeben durch $\mathbf{k}^{(a)}$, wo a die zugehörige Stufe ist. In einem System, wo n ungerade ist, gibt es $n(n-2)$, wo n gerade ist, $\frac{n(n-2)}{2}$ Zahlen $\mathbf{k}$. Allgemein aber gilt, daß die höchste Potenz von $\mathbf{k}^{(2)}$ gleich der $(n-2)^{\text{ten}}$ Potenz von $\mathbf{V}$ ist:

(77) $$\mathbf{k}^{\{n(n-2)\}} = \mathbf{V}^{n-2}.$$

Hiervon Gebrauch machend, kann man in den Systemen ungerader Richtungszahl die Zahlen $\mathbf{k}$ ersetzen durch Zahlen $\mathbf{m}$, indem man setzt:

(78) $$\begin{aligned} \mathbf{m}^{(1)} &= \mathbf{k}^{(1)} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ \mathbf{m}^{(a)} &= \{\mathbf{m}^{(1)}\}^a, \end{aligned}$$

also:

(79)
$$\mathbf{m}^{\{n(n-2)\}} = \mathbf{m}$$
und:

(80)
$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathbf{m}^{(2)} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Als einfache Größen seien wiederum diejenigen bezeichnet, die durch fortgesetzte Multiplikation von Vektoren entstehen können. Die Summe zweier Größen verschiedener Stufe ist also z. B. nicht einfach, sondern zusammengesetzt. Nur die einfachen Größen lassen eine einfache geometrische Deutung zu.

Alle Systeme der hier angegebenen Art sind Produktsysteme eines ursprünglichen Systems mit einer Hauptreihe. Die symbolische Darstellung lautet:

(81)
$$U_{g2}^{\frac{n-1}{2}} \quad H_{gn(n-2)}$$

für ungerades n, und:

(82)
$$U_{g2}^{\frac{n}{2}} \quad H_{g\frac{1}{2}n(n-2)}$$

für gerades n.

Für $n = 4$ ist z. B.:
$$\mathbf{V}^2 = -\mathbf{m}.$$

Die Ausdehnungsgrößen der ersten vier Stufen sind:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, & \text{Vektoren,} \\ \mathbf{p}_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \text{ etc.,} & \text{Bivektoren,} \\ \mathbf{E}_{123} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \text{ etc.,} & \text{Trivektoren,} \\ \mathbf{V} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4, & \text{Quadrivektor.} \end{array}$$

Der Quadrivektor $\mathbf{V}$ ist kein gewöhnlicher Skalar, da
$$\mathbf{V}\mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i\mathbf{V}. \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Die Ausdehnungsgrößen der höheren Stufen sind:

$$\begin{array}{lll} 5\text{ter Stufe:} & \mathbf{V}\mathbf{e}_1, \text{ etc.,} \\ 6 \;\text{„} \quad \text{„} & : \mathbf{V}\mathbf{p}_{12}, \text{ etc.,} \\ 7 \;\text{„} \quad \text{„} & : \mathbf{V}\mathbf{E}_{123}, \text{ etc.,} \\ 8 \;\text{„} \quad \text{„} & : \mathbf{V}\mathbf{V} = -\mathbf{m}. \end{array}$$

Zwischen $\mathbf{p}_{12}$ und $\mathbf{V}\mathbf{p}_{12}$ besteht ein Unterschied. $\mathbf{p}_{12}$ ist zu betrachten als die durch zwei Strecken bestimmte, und $\mathbf{V}\mathbf{p}_{12}$ als die durch zwei Trivektoren bestimmte Ebene im vierdimensionalen Raume:

$$\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4 = (\mathbf{e}_4\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{V}\mathbf{p}_{12}.$$

Werden die Elemente $\mathbf{e}$ nicht als Strecken im vierdimensionalen, sondern als Punkte im (elliptischen) dreidimensionalen Raume gedeutet,

dann ist der Unterschied zwischen $\mathbf{p}_{12}$ und $\mathbf{V}\mathbf{p}_{12}$ derselbe wie der zwischen Strecken und Keilen. Die Analysis wäre also mit Vorteil da zu verwenden, wo, wie z. B. in Studys Geometrie der Dynamen[1]), Strecken und Keile auseinandergehalten werden müssen.

Gibt man den Unterschied auf, das heißt, setzt man

$$\mathbf{V} = \mathbf{m}, \tag{83}$$

so verliert das System seine Assoziativität. Dasselbe gilt von allen Systemen gerader Richtungszahl, da hier für das vollständige System stets:

$$\mathbf{V}\mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i\mathbf{V}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{76}$$

ist. Diese Art Systeme haben dann auch kein Kernsystem, das als einfachstes Abbild des ganzen Systems zu betrachten wäre.

Bei assoziativen Systemen von ungerader höherer Richtungszahl läßt sich stets ohne Aufgeben des assoziativen Gesetzes statt:

$$\mathbf{V}^{n-2} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\mathbf{m} \tag{84}$$

setzen:

$$\mathbf{V} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\mathbf{m}. \tag{85}$$

Dadurch verschwindet in diesen Systemen der Unterschied von räumlichen Größen, die sich wie Strecken und Keile nur durch die Weise ihres Entstehens unterscheiden. Die übrig bleibenden Systeme sind nun das Produkt ihres Kernsystems und des vereinfachten Potenzsystems $H_{\varrho n}$. Die Kernsysteme selbst lassen sich leicht angeben, z. B. lautet das Kernsystem für $n = 5$:

$$\left.\begin{cases} \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_{12} = -\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_{12}\mathbf{i}_{12} = -\mathbf{m} \\ \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 = \mathbf{m} & \mathbf{i}_1\mathbf{i}_{12} = \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_{12}\mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_{12}\mathbf{i}_{34} = \mathbf{i}_5 = \mathbf{i}_{34}\mathbf{i}_{12} & \mathbf{i}_1\mathbf{i}_{23} = -\mathbf{i}_{45} = \mathbf{i}_{23}\mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_{12}\mathbf{i}_{23} = \mathbf{i}_{13} = -\mathbf{i}_{23}\mathbf{i}_{12} & \end{cases}\right\}\text{cycl.} \tag{86}$$

Es ist dies die geometrische Form erster Ordnung des ursprünglichen Systems U_4 mit 16 Einheiten. Betrachtet man nur einfache Größen, so enthält das System in dieser Form keine reellen Teiler der Null. (Vgl. S. 34.) Die geometrische Zerlegung des Produkts für $U_{\varrho 4}H_{\varrho 5}$ geschieht durch Unterscheidung erstens von Ausdehnungsgrößen verschiedener Stufe, zweitens von Ausdehnungsgrößen, die mit $\mathbf{m}^{(2)}$ multipliziert oder durch $\mathbf{m}^{(2)}$ dividiert sind, und drittens von Ausdehnungs-

1) 00,3.

größen, die mit $\mathfrak{m}^{(4)}$ multipliziert oder durch $\mathfrak{m}^{(4)}$ dividiert sind. (Diese Zerlegung ist im wesentlichen identisch mit der von Joly[1]) angegebenen, nur nimmt Joly gleich $e_1 e_1 = -\mathfrak{m}$).

Man kann bei den Systemen ungerader Richtungszahl noch weitergehen und in derselben Weise, wie es für $n = 3$ geschehen ist, das System ersetzen durch sein Kernsystem. Dabei werden nur Größen gleicher rotationaler Orientierung identifiziert, und das assoziative Gesetz bleibt erhalten. Die Kernsysteme bilden die einfachsten Systeme der geometrischen Größen erster Ordnung bei ungerader Dimensionenzahl. Für n Dimensionen ist das System $2^{\frac{n-1}{2}}$ ter Ordnung. (Die Kernsysteme stimmen überein mit den „n way algebras" Cliffords.[2]))

Die Beziehungen der Systeme höherer Dimensionenzahl zur Graßmannschen Ausdehnungslehre. Das System der äußeren (sowohl progressiven als regressiven) Multiplikation Graßmanns für freie Ausdehnungsgrößen und für irgend eine Dimensionenzahl entsteht, indem man in dem assoziativen System der geometrischen Größen erster Ordnung zunächst alle Unterschiede wie die zwischen Strecken und Keilen aufgibt (bei gerader Dimensionenzahl geht dabei die Assoziativität verloren), die Multiplikation ferner geometrisch zerlegt, und sich auf die Betrachtung der Ausdehnungsgrößen beschränkt. Die Graßmannsche Ausdehnungslehre hebt also gleichsam aus den assoziativen Systemen den wichtigsten Teil, das sind die Ausdehnungsgrößen verschiedener Stufe, heraus, und kümmert sich nicht um die rechten Winkelgrößen. Man gelangt zu diesem bei speziellen affinen Transformationen invarianten Teil der Ausdehnungslehre sofort, wenn man sich die Aufgabe stellt, unter Anwendung des Kleinschen Klassifizierungsprinzips eine Analysis zu bilden, die sich nur mit Ausdehnungsgrößen befaßt. (Vgl. S. 52.) Obwohl die Assoziativität dabei verloren geht, entstehen durch diese Beschränkung die große Einfachheit und Übersichtlichkeit, die für die Ausdehnungslehre charakteristisch ist, und die namentlich bei mehreren Richtungen, wo die assoziativen Systeme sehr kompliziert werden, ins Gewicht fällt. Wenn also auch gar kein Bedürfnis vorliegt, die Graßmannsche Analysis allgemein durch irgendeine andere, assoziative, zu ersetzen, so bleibt es doch immerhin eine wichtige Forderung, die Beziehungen zwischen den beiden Systemen vollständig klarzulegen. 1904 hat E. B. Wilson diese Forderung in Heidelberg sogar ausdrücklich aufgestellt.[3]) Eine vollständige Klarlegung würde nun den Rahmen dieses Buches überschreiten, und bleibe demnach einer besonderen Abhandlung vorbehalten. Das

1) 00,16. 2) 78,1. 3) 05,3.

Prinzip der Lösung ist aber durch obige Erörterungen gegeben, die nur für den Fall $n = 3$ eingehender gestaltet werden konnten. Die Behandlung weicht von der anderer Autoren[1]) namentlich dadurch ab, daß sie nur das Kleinsche Prinzip der Klassifizierung voraussetzt, und infolgedessen nicht sofort

$$\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_1 = \pm \mathfrak{m}$$

gesetzt wird, wodurch es dann im System nicht nur Vektoren, sondern auch skalare Größen verschiedener Stufe gibt. Nur dadurch wird es möglich, Systeme zu schaffen, die sämtliche geometrischen Größen erster Ordnung, also Ausdehnungsgrößen und Winkelgrößen, z. B. für $n = 3$ Vektoren, Bivektoren und Quaternionen, in Harmonie umfassen.

Die Analysen der gebundenen geometrischen Größen. Der Weg, der zur Bildung der Analysen gebundener geometrischer Größen einzuschlagen ist, sei hier nur ganz kurz angedeutet. Bekanntlich besteht eine vollkommene Korrespondenz zwischen den freien Größen in einem euklidischen Raume von n Dimensionen und den gebundenen Größen in einem elliptischen Raum von $n - 1$ Dimensionen. Das Zahlensystem für gebundene Größen in einem elliptischen Raum von $n - 1$ Dimensionen ist also dasselbe wie das hier für freie Größen für n Dimensionen abgeleitete. Soll das Zahlensystem für gebundene Größen in einem euklidischen Raume bestimmt werden, so kann es genau in derselben Weise abgeleitet werden, wie es für freie Größen geschehen ist, wenn einmal feststeht, welche Transformationsgruppen zur Definition und Klassifizierung der Größen herangezogen werden sollen. Es resultiert dann im allgemeinen ein System, das aus dem System des elliptischen Raumes derselben Dimensionenzahl hervorgeht, indem in der Hauptreihe, die Faktor des Systems ist, von den idempotenten Zahlen eine oder mehrere in Zahlen verwandelt werden, deren Quadrat Null ist. Zum Beispiel sind die Biquaternionen Cayleys, die als eine Verkürzung des assoziativen Systems der gebundenen Größen in drei Dimensionen aufzufassen sind, für den elliptischen Raum gleich:

$$U_{g2} H_{g2}$$

während sie für den euklidischen Raum Produkt sind von U_{g2} mit dem System

(87)

	$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{e}_2$
$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{e}_1$	0
$\mathfrak{e}_2$	0	0

[2]).

1) Clifford 76,1, 78,1, Joly 97,1, 00,1, Macaulay 07,2.

2) Vgl. 14,1 S. $x + 64$.

Polare und axiale Größen. In jedem System ungerader Richtungszahl können alle vorkommenden Größen sowohl polar als axial aufgefaßt werden. Schreibt man z. B. für $n = 3$, anfangend bei den Monovektoren:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_3, \quad \text{cycl.},$$

so ändern sich bei Übergang des Koordinatensystems $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ zu $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3$, die Zeichen aller Vektoren, aber nicht die der Bivektoren. Man sagt, die ersten haben polaren, letztere axialen Charakter. Fängt man aber umgekehrt bei den polar gefaßten Bivektoren an, und schreibt man:

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \text{cycl.},$$

so ändern sich bei Übergang von $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ zu $-\mathbf{E}_1, -\mathbf{E}_2, -\mathbf{E}_3$ gerade die Zeichen aller Bivektoren, nicht aber die der Vektoren, die jetzt axial erscheinen.[1])

Offenbar erzeugen zwei polare oder zwei axiale Größen bei Multiplikation eine axiale Größe, während eine polare Größe entsteht, wenn die beiden Faktoren verschiedener Art sind. Diese Beziehungen lassen sich vollständig dadurch zur Darstellung bringen, daß wir von vornherein axiale Größen durch ein Zeichen, z. B. durch einen Strich über dem Buchstaben, von den polaren unterscheiden. Dadurch hat das System dann aber 24 Einheiten bekommen:

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{e}_i, \mathbf{E}_i, \varepsilon_i, \mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}, \mathbf{m} \\ \bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{E}}_i, \bar{\varepsilon}_i, \bar{\mathbf{m}}^{(1)}, \bar{\mathbf{m}}^{(2)}, \bar{\mathbf{m}} \end{matrix}\right\} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Die Gleichungen sind alle abzuleiten aus:

$$(88)\quad \left\{\begin{array}{lll} \left.\begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_3 = -\bar{\varepsilon}_2 \times \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{\varepsilon}_1 = -\bar{\mathbf{m}} \end{array}\right\} \text{cycl.} & & \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{m}^{(1)} \times \mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{E}}_1 \\ \mathbf{m}^{(1)} \times \bar{\mathbf{E}}_1 = \varepsilon_1 \\ \mathbf{m}^{(1)} \times \varepsilon_1 = \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{m}^{(1)} \times \bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{m}^{(1)} \times \mathbf{E}_1 = \bar{\varepsilon}_1 \\ \mathbf{m}^{(1)} \times \bar{\varepsilon}_1 = \mathbf{e}_1 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} \text{Kommut.,} \\ \text{cycl.} \end{array} & \begin{array}{l} (\mathbf{m}^{(1)})^{2\times} = \bar{\mathbf{m}}^{(2)} \\ (\mathbf{m}^{(1)})^{3\times} = \mathbf{m} \\ (\mathbf{m}^{(1)})^{4\times} = \bar{\mathbf{m}}^{(1)} \\ (\mathbf{m}^{(1)})^{5\times} = \mathbf{m}^{(2)} \\ (\mathbf{m}^{(1)})^{6\times} = \bar{\mathbf{m}} = \text{Modulus}, \end{array} \end{array}\right.$$

und das System läßt sich symbolisch darstellen durch:

$$U_{g2} H_{g6},$$

oder bei Identifizierung von $\mathbf{e}$, $\mathbf{E}$ und ε, bzw. $\bar{\mathbf{e}}$, $\bar{\mathbf{E}}$ und $\bar{\varepsilon}$, durch:

$$U_{g2} H_{g2}.$$

1) Vgl. Prandtl 04. 4.

Besonders in dem System in **i** und **m**, wo der Unterschied der Monovektoren, Bivektoren und rechten Versoren verschwindet, gewinnt der Unterschied zwischen polaren und axialen Größen an Wichtigkeit. Denn gerade der Physiker hat ein großes Interesse daran zu wissen, ob eine Größe polaren oder axialen Charakter hat, da dieser Charakter ihr physikalisches Verhalten mit bestimmt. Praktisch kommt man dabei dann auch ohne besonderes Kennzeichen für die axialen Vektoren aus, es braucht nur, wo Verwechselung möglich wäre, eine nähere Erklärung zu der Formel geschrieben zu werden; in Wirklichkeit aber hat sich das System durch die Unterscheidung verdoppelt. In Zahlensystemen gerader Richtungszahl sind alle Größen ungerader Stufe polar, alle Größen gerader Stufe axial. Es findet hier also keine Verdoppelung des Systems statt.

Schluß. Soweit es im Rahmen dieses Kapitels möglich war, ist im Vorgehenden gezeigt, daß die bei Drehung invarianten Systeme räumlicher Analysis, soweit sie sich mit geometrischen Größen erster Ordnung, das sind Ausdehnungsgrößen und rechte Winkelgrößen verschiedener Stufe, befassen, auf das eine ursprüngliche assoziative System (vgl. S. 17) zurückzuführen sind. Wenn auch einige durch Verkürzungen, die im Interesse der praktischen Rechnung gemacht werden, ihre Assoziativität einbüßen, so sind diese doch nur in uneigentlichem Sinne als nichtassoziativ aufzufassen. Es bilden die Systeme dieser Art demnach eine Familie. Zusammen beherrschen sie das Gebiet der geometrischen Größen erster Ordnung vollständig. Wir treten jetzt an die Aufgabe heran, auch die Beziehungen der ursprünglichen assoziativen Systeme zu den geometrischen Größen zweiter und höherer Ordnung aufzudecken.

Zweites Kapitel.

Die Beziehungen der assoziativen Zahlensysteme zu den geometrischen Größen höherer Ordnung.

Allgemeines. In derselben Weise, wie wir S. 27 ff. das assoziative System für die geometrischen Größen bis zur ersten Ordnung ableiteten durch Nullsetzen der in den Produkten zweier Faktoren auftretenden Größen zweiter Ordnung und Anwendung des assoziativen Gesetzes, würden wir unter Anwendung desselben Gesetzes eine ähnliche Analysis für geometrische Größen bis zur zweiten Ordnung ableiten können, durch Nullsetzen der in den Produkten dreier Faktoren auftretenden Größen dritter Ordnung. Wir können diese Aufgabe nun aber bedeutend einfacher gestalten, wenn wir von der feineren Unterscheidung absehen, und die Größen nur noch nach dem Verhalten ihrer Bestimmungszahlen bei Drehungen, also nach der Ordnung, unterscheiden, demnach alle Größen gleicher rotationaler Orientierung bis auf einen Zahlenfaktor identifizieren. Hätten wir diese Vereinfachung auch im vorigen Kapitel von vornherein gemacht, so wären wir sofort zu dem System in $\mathbf{m}$ und $\mathbf{i}$, der Vektoranalysis (mit $\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 = -1$), gelangt, und wir hätten nicht das Vektoren, Bivektoren und Quaternionen umfassende System ableiten und die sich daran anknüpfenden Betrachtungen aufstellen können. Wäre dieser kürzere Weg dort also nicht zu empfehlen gewesen, so ist er hier gerade angewiesen, und zwar aus einem doppelten Grunde. Zunächst handelt es sich ja in diesem Buche um die Ableitung einer für den Physiker praktisch brauchbaren Analysis, der Affinoranalysis, die als die natürliche Erweiterung der Vektoranalysis zu betrachten ist, sich also ebensowenig wie letztere um die feineren Unterschiede der Größen der speziellen affinen Gruppe gegenüber zu bekümmern braucht. Ferner empfiehlt es sich überhaupt, bei Einführung neuer Begriffe zunächst in möglichst einfacher Weise vorzugehen und die Betrachtung von allem nicht unumgänglich Nötigen freizuhalten.

Entstehung des Systems der geometrischen Größen bis zur zweiten Ordnung. Wir identifizieren also in diesem Kapitel grund-

sätzlich, bis auf einen Zahlenfaktor, alle Größen gleicher rotationaler Orientierung, und bringen dies schon sofort dadurch zum Ausdruck, daß wir die drei Einheitsvektoren, die zum Ausgangspunkt der Ableitung dienen, wie in der Vektoranalysis mit $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ und $\mathbf{i}_3$ bezeichnen.

Die Produkte zweier Vektoren lassen sich dann alle linear ableiten aus den neun Einheitsprodukten:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i}_1 \urcorner \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_1 \urcorner \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_1 \urcorner \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_2 \urcorner \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 \urcorner \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_2 \urcorner \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_3 \urcorner \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_3 \urcorner \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \urcorner \mathbf{i}_3 , \end{array}$$

wo $\urcorner$ das Zeichen der Multiplikation ist.

Jede Zahl, die aus diesen Produkten zusammengesetzt ist:

$$\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{i}_1 \urcorner \mathbf{i}_1 + a_{23}\mathbf{i}_2 \urcorner \mathbf{i}_3 + a_{32}\mathbf{i}_3 \urcorner \mathbf{i}_2 + \text{cycl.},$$

zerlegen wir in ähnlicher Weise wie auf S. 27 und 28 folgendermaßen:

$$(89)\quad \begin{cases} \mathbf{A}' = (a_{23} - a_{32})\dfrac{\mathbf{i}_2 \urcorner \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \urcorner \mathbf{i}_2}{2} + \text{cycl.} \\ \mathbf{A}'' = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\dfrac{\mathbf{i}_1 \urcorner \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \urcorner \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \urcorner \mathbf{i}_3}{3} \\ \mathbf{A}''' = a_{11}\dfrac{2\mathbf{i}_1 \urcorner \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 \urcorner \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3 \urcorner \mathbf{i}_3}{3} + (a_{23} + a_{32})\dfrac{\mathbf{i}_2 \urcorner \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \urcorner \mathbf{i}_2}{2} + \text{cycl.} \end{cases}$$

Die Bestimmungszahlen des Teiles $\mathbf{A}'$:

$$a_{23} - a_{32}, \quad \text{cycl.}$$

transformieren sich wie die Koordinaten a_1, a_2, a_3 eines Punktes. Wir dürfen also, dem Prinzipe der Klassifizierung gemäß, $\mathbf{A}'$ als Vektor betrachten. Die Zahlen

$$\frac{\mathbf{i}_2 \urcorner \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \urcorner \mathbf{i}_2}{2}, \quad \text{cycl.}$$

sind demnach jedenfalls dieselben Vielfachen von $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ und $\mathbf{i}_3$. Also ist

$$(90)\quad \frac{\mathbf{i}_2 \urcorner \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \urcorner \mathbf{i}_2}{2} = \beta \mathbf{i}_1,$$

wo β eine näher zu bestimmende Konstante ist.

Die einzige Bestimmungszahl des Teiles $\mathbf{A}''$ ist also ein Skalar, und man kann demnach schreiben:

$$(91)\quad \frac{\mathbf{i}_1 \urcorner \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \urcorner \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \urcorner \mathbf{i}_3}{3} = 2\alpha \mathbf{k},$$

wo $\mathbf{k}$ ein Skalar, den wir als Einheit einführen, und α eine näher zu bestimmende Konstante ist.[1])

---

1) Für die Bedeutung der 2 siehe S. 77 f.

(Setzen wir jetzt hier A''' gleich null, so gelangen wir zu den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}_1 \dashv \mathbf{i}_1 &= 2\alpha \mathbf{k} \\ \mathbf{i}_1 \dashv \mathbf{i}_2 &= \beta \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_2 \dashv \mathbf{i}_1 &= -\beta \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{k} \dashv \mathbf{i}_1 &= \gamma \mathbf{i}_1 \end{aligned}\right\} \text{cycl.},$$

wo $\dashv$ das Zeichen der in dieser Weise neuentstandenen Multiplikation und γ eine näher zu bestimmende Konstante ist. Bringen wir für diesen Rest der Analysis das assoziative Gesetz zur Geltung, so folgt, bei Einführung der neuen Einheiten $\mathbf{i}_1' = \frac{1}{\beta}\, \mathbf{i}_1$ cycl., $\mathbf{m} = -\frac{2\alpha}{\beta^2}\, \mathbf{k}$:

$$(92) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathbf{i}_1' \dashv \mathbf{i}_1' &= -\mathbf{m} \\ \mathbf{i}_1' \dashv \mathbf{i}_2' &= \mathbf{i}_3' \\ \mathbf{i}_2' \dashv \mathbf{i}_1' &= -\mathbf{i}_3' \\ \mathbf{m} \dashv \mathbf{i}_1' &= \mathbf{i}_1' \end{aligned}\right\} \text{cycl.}$$

Daneben zeigt sich leicht, daß, wie auch die Konstanten α, β und γ gewählt werden mögen, die Multiplikation $\dashv$ stets eine Vielfachsumme von $\cdot$ und $\times$ ist. Wir sind also auf direktem Wege zu den Gleichungen (51) mit noch unzerlegter Multiplikation gelangt, die die Grundlage der Vektoranalysis mit $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -1$ bilden.

Die Größe A''' enthält keinen Skalarteil mehr (vgl. S. 28), und ihre Bestimmungszahlen transformieren sich wie

$$a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ 2a_2a_3,\ 2a_3a_1,\ 2a_1a_2 .$$

Sie ist eine Größe zweiter Ordnung. Wir wollen jetzt diese Größen nicht mehr null setzen, sondern sie mit in die Analysis hineinnehmen, d. h. die Multiplikation $\neg$ so bestimmen, daß eine Analysis der Größen bis zur zweiten Ordnung entsteht. Zur Ableitung der Multiplikationsregeln betrachten wir dann das assoziative Produkt dreier Vektoren.

Ein jedes solches Produkt läßt sich linear ableiten aus den 27 Produkten von Einheitsvektoren

$$\mathbf{i}_a\, \mathbf{i}_b\, \mathbf{i}_c \qquad\qquad a, b, c = 1, 2, 3$$

(Das Zeichen der Multiplikation werde hier einfachheitshalber unterdrückt.) Im Hinblick auf das assoziative Gesetz kann man nun sofort aussagen, daß die Bestimmungszahlen einer Größe $\underset{\sim}{\Omega}$, die als lineare Funktion der zehn Größen:

$$\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1\,,\quad \text{cycl.},$$
$$\frac{\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1+\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1}{3},\quad \text{cycl.},$$
$$\frac{\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1+\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2}{3},\quad \text{cycl.},$$
$$\frac{\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_3+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_2+\text{cycl.}}{6},$$

angegeben ist, sich transformieren wie:

$$a_1^3,\ \text{cycl.},\ 3a_1^2a_2,\ \text{cycl.},\ 3a_1a_2^2,\ \text{cycl.},\ 6a_1a_2a_3.$$

(vgl. S. 28).

Da

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

bei Drehungen des Bezugssystems invariant bleibt, transformieren sich

$$a_1^3+a_1a_2^2+a_1a_3^2,\quad a_2a_1^2+a_2^3+a_2a_3^2,\quad a_3a_1^2+a_3a_2^2+a_3^3,$$

wie

$$a_1,\ a_2,\ a_3,$$

und die Größe Ω enthält demnach noch einen Vektor, dessen mit $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$ und $\mathfrak{i}_3$ korrespondierende Einheiten:

$$\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1+\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1+\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2+\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1+\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_3,\ \text{cycl.}$$

sind. Dem Prinzip der Klassifizierung gemäß ist also

$$\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1+\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1+\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2+\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1+\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_3=\delta\mathfrak{i}_1,\ \text{cycl.} \tag{93}$$

wo δ eine näher zu bestimmende Konstante ist.

Der übrigbleibende Teil von Ω, der sich ausdrücken läßt in den zehn Größen:

$$\tfrac{1}{3}(2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1-\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1-\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2-\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2-\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1-\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3-\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_3),\ \text{cycl.},$$
$$\tfrac{1}{9}(-\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2-\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1-\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3-\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_3),\ \text{cycl.},$$
$$\tfrac{1}{9}(-\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1-\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1-\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2-\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2+2\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1+2\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_3),\ \text{cycl.},$$
$$\tfrac{1}{6}(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_3+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_2+\cdots),$$

enhält keinen Vektorteil mehr, seine Bestimmungszahlen transformieren sich ebenfalls wie:

$$a_1^3,\ \text{cycl.},\ 3a_1^2a_2,\ \text{cycl.},\ 3a_1a_2^2,\ \text{cycl.},\ 6a_1a_2a_3.$$

Dieser Teil ist also als eine reine Größe dritter Ordnung zu betrachten.[1]) In einer Analysis, die sich nur mit Größen bis zur zweiten Ordnung be-

1) (Vgl. S. 25). Voigt nennt auch Ω eine Größe dritter Ordnung, wir nennen dagegen Ω die Summe eines Vektors und einer Größe dritter Ordnung.

fassen soll, sind aber alle Größen dritter Ordnung gleich Null zu setzen. Wir erhalten demnach aus dieser Bedingung die zehn Gleichungen:

$$
(94)\left\{\begin{aligned}
&2\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2-\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\\
&\qquad-\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3-\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_3=0\\
&-\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_1+2\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1+2\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2+2\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\\
&\qquad-\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3-\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_3=0\\
&-\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2-\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\\
&\qquad+2\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_1+2\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3+2\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3=0\\
&\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_3+\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_2+\text{cycl.}=0
\end{aligned}\right\}\text{cycl.}
$$

die zusammen mit:

$$
(93)\left\{\begin{aligned}
&\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\\
&\qquad+\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3+\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_3=\delta\mathbf{i}_1,\ \text{cycl.}
\end{aligned}\right.
$$

den Gleichungen

$$
(90)\qquad \mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2-\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1=2\beta\mathbf{i}_3,\ \text{cycl.},
$$

und dem assoziativen Gesetz, das jetzt für den übrigbleibenden Teil der Analysis gelten soll, zur vollständigen Ableitung des ganzen Systems genügen.

Zunächst geht aus (93) und (94) hervor:

$$
(95)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_1=\tfrac{1}{3}\,\delta\mathbf{i}_1\\
&\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2=\tfrac{1}{3}\,\delta\mathbf{i}_1\\
&\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3+\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_3=\tfrac{1}{3}\,\delta\mathbf{i}_1
\end{aligned}\right\}\text{cycl.}
$$

Aus diesen Gleichungen und aus (90) folgt:

$$
\left.\begin{aligned}
&3\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2-\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2\\
&\qquad+\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2=\tfrac{1}{3}\,\delta\mathbf{i}_1\quad\text{(nach (95))}\\
&3\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2-2\beta\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_3+2\beta\mathbf{i}_3\neg\mathbf{i}_2=\tfrac{1}{3}\,\delta\mathbf{i}_1\\
&\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2=\left(\tfrac{1}{9}\,\delta+\tfrac{4}{3}\,\beta^2\right)\mathbf{i}_1\quad\text{(nach (90))}
\end{aligned}\right\}\text{cycl.}
$$

Da aber andererseits:

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2=\tfrac{1}{3}\,\delta\mathbf{i}_1\quad\text{(nach (94))}\\
&\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2=\tfrac{1}{3}\,\delta\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1\\
&\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_2=0\quad\text{(nach (95))}\\
&\left(\tfrac{1}{9}\,\delta+\tfrac{4}{3}\,\beta^2\right)\{\mathbf{i}_2\neg\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_1\neg\mathbf{i}_2\}=0,
\end{aligned}\right\}\text{cycl.}
$$

ist, so ergibt sich:

$$
(96)\qquad \delta=-12\beta^2,
$$

und demnach:

$$(97) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 = 0 \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 = 0 \end{array}\right\} \text{cycl.}$$

Da nach (90):

$$\begin{array}{c} \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_3 = +\, 2\beta \mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_1 = -\, 2\beta \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_2 \\ \text{cycl.,} \end{array}$$

und nach (94):

$$\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_3 + \text{cycl.} = 0,$$

ist, folgt ferner:

$$(98) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_3 = \beta(\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_3) \\ \mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 = -\, \beta(\mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1) \end{array}\right\} \text{cycl.}$$

Die Produkte von drei Vektoren lassen sich jetzt alle auf solche von zwei Vektoren zurückführen:

$$(99) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 = 0 \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_2 = 2\beta \mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_3 = \beta \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 + \beta \mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_3 - \beta \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 = -\, 2\beta \mathbf{i}_4 \neg \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 = 0 \\ \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_3 = -\, \beta \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_2 - \beta \mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_3 + \beta \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 = -\, 4\beta^2 \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 = 2\beta \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_3 = -\, 2\beta \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 \end{array}\right\} \text{cycl.}$$

Das System ist also geschlossen, und seine sämtlichen Rechnungsregeln lassen sich durch Ausmultiplizieren ableiten. Führen wir die folgenden Zahlen als Einheiten ein:

$$(100) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{I}_{12} = \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{I}_{21} = \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{I}_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_3) = \frac{1}{2\beta}\, \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_3 \end{array}\right\} \text{cycl.,}$$

so gelten offenbar die Multiplikationsregeln:

$$(101) \qquad \mathbf{I}_{pq} \neg \mathbf{I}_{rs} = \left\{\begin{array}{ll} 4\beta^2 \mathbf{I}_{ps} & \text{für } q = r \\ 0 & \;\;\text{„}\;\; q \neq r \end{array}\right\} p, q, r, s = 1, 2, 3.$$

Damit haben wir das System der Affinoranalysis als ursprüngliches System dritter Ordnung erkannt, dessen Einheiten der algebraischen Normalform die Zahlen

$$\frac{1}{4\beta^2} \mathbf{I}_{pq} \qquad p, q = 1, 2, 3,$$

sind. Später, bei der praktischen Rechnung, werden wir eine Multiplikation einführen, die gleich $\frac{1}{4\beta^2}\urcorner$ ist (S. 92 ff.), für diese sind dann die Zahlen

$$\mathbf{I}_{pq} \qquad p, q = 1, 2\ 3,$$

Einheiten der algebraischen Normalform. Diese Zahlen seien darum gleich hier durch ein besonderes Zeichen angedeutet und fernerhin algebraische Einheiten genannt.

Die verschiedenen Größen der Affinoranalysis. Zu den Skalaren und Vektoren der Vektoranalysis gesellen sich in der Affinoranalysis Größen zweiter Ordnung. Wir schlagen für diese Größen den Namen Deviator vor, der sich dadurch empfiehlt, daß in der Lehre der Deformationen, wie sich zeigen wird, ein Deviator einer Transformation der Punkte des Raumes entspricht, die sämtliche rechtwinkligen Achsensysteme in einem Punkt bis auf eines in schiefwinklige umwandelt, ohne Drehung (kein Vektorteil) und ohne kubische Ausdehnung (kein Skalarteil). Für eine solche Transformation erscheint der Name Deviation passend (vgl. S. 163 und S. 225). Ein Deviator ist durch fünf Bestimmungsstücke gegeben. Größen, die sich aus einem Skalar und einem Deviator zusammensetzen, heißen nach Voigt Tensoren. Sie entsprechen einer Deviation mit kubischer Ausdehnung. Die allgemeinste Größe der Analysis entspricht der affinen Transformation. F. Jung hat darum für diese Größe den Namen „Affinor" vorgeschlagen.[1])

Skalare und Vektoren werden, wie vielfach in der Vektoranalysis, durch Kursivbuchstaben bzw. kleine fette vertikale Buchstaben dargestellt, alle Größen, die einen Deviator enthalten, aber durch große fette vertikale Buchstaben. Da der Ausdruck „einfache Größe" aus dem ersten Kapitel, hier, wo wir keine Stufen mehr unterscheiden, seine Bedeutung verliert, wollen wir von nun an unter einfache Größe eine Größe verstehen, die von einer bestimmten Ordnung ist, sich also nicht aus Größen verschiedener Ordnung zusammensetzt.

Die geometrische Normalform zweiter Ordnung. Als Einheiten der Analysis die Einheiten $\mathbf{I}_{pq}$ der algebraischen Normalform zu nehmen, empfiehlt sich nicht, ebensowenig wie bei dem System erster Ordnung (S. 18). Wir wollen als Einheiten zunächst $\mathbf{k}$, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ und $\mathbf{i}_3$ beibehalten. Für diese Einheiten gilt:

1) 08 5.

$$(102)\quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 &= \beta \mathbf{i}_3 + \frac{\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1}{2} \\ \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 &= -\beta \mathbf{i}_3 + \frac{\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1}{2} \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 &= 2\alpha \mathbf{k} + \frac{2\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_3}{3} \\ \mathbf{k} \neg \mathbf{i}_1 &= -\frac{4}{3}\frac{\beta^2}{\alpha}\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{k} \end{aligned}\right\} \text{cycl.}$$

Als Einheiten der Größen zweiter Ordnung führen wir ferner ein:

$$(103)\quad \mathbf{L}_1 = -\frac{2\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_3}{3\alpha}, \text{ cycl.,}$$

Einheitsdeviatoren erster Art und

$$(104)\quad \mathbf{I}_1 = -\frac{\mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \neg \mathbf{i}_2}{2\beta}, \text{ cycl.,}$$

Einheitsdeviatoren zweiter Art. Offenbar ist

$$(105)\quad \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 = 0.$$

Deviatoren lassen sich also auf sechs Einheiten, zwischen denen eine lineare Beziehung besteht, zurückführen. Die algebraischen Einheiten $\mathbf{I}_{jk}$ setzen sich folgendermaßen aus den Einheiten $\mathbf{k}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{L}$ und $\mathbf{I}$ zusammen:

$$(106)\quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{I}_{12} &= -\beta \mathbf{i}_3 - \beta \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_{21} &= \beta \mathbf{i}_3 - \beta \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_{11} &= -\alpha \mathbf{k} - \alpha \mathbf{L}_1 \end{aligned}\right\} \text{cycl.}$$

Wird eine Größe zweiter Ordnung in den Einheiten $-\mathbf{I}_{11}$, $-\mathbf{I}_{22}$, $-\mathbf{I}_{33}$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ und $\mathbf{I}_3$ ausgedrückt, so transformieren sich ihre Bestimmungszahlen wie

$$a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_2 a_3\sqrt{2},\ a_3 a_1\sqrt{2},\ a_1 a_2\sqrt{2},$$

also, wie aus der Invarianz von

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2$$

folgt, orthogonal (S. 22). Wir nennen daher $-\mathbf{I}_{11}$, $-\mathbf{I}_{22}$, $-\mathbf{I}_{33}$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ einen Satz orthogonaler Einheiten.

Es gilt jetzt noch, die Konstanten α und β zu bestimmen. Ersetzen wir die Einheiten $\mathbf{k}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{L}$ und $\mathbf{I}$ durch $\mathbf{k}'$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{I}'$, $\mathbf{L}'$ nach den Formeln:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' &= a\mathbf{k} \\ \mathbf{i}' &= b\mathbf{i} \\ \mathbf{L}' &= a\mathbf{L} \\ \mathbf{I}' &= b\mathbf{I}, \end{aligned}$$

so sind die Konstanten α' und β' der neuen Form des Systems gegeben durch:

$$\alpha' = \frac{a^2}{b}\alpha \qquad \beta' = \frac{1}{a}\beta .$$

Von gegebenen Werten von α und β ausgehend, können wir also durch andere Wahl der Einheiten zu beliebigen anderen Werten gelangen. Die Wahl von α und β ist demnach frei, denn ihre Änderung bedeutet nur eine Änderung der Einheiten, nicht des Systems selbst. Es liegt nun der Versuch nahe, diese Wahl so zu treffen, daß der Teil der Multiplikationsregeln, der sich nur mit Größen erster Ordnung befaßt, also

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}_1 ⊸ \mathbf{i}_2 &= \beta \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_2 ⊸ \mathbf{i}_1 &= -\beta \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_1 ⊸ \mathbf{i}_1 &= 2\alpha \mathbf{k} \\ \mathbf{k} ⊸ \mathbf{i}_4 &= -\frac{4}{3}\frac{\beta^2}{\alpha}\mathbf{i} \end{aligned}\right\} \text{cycl.}$$

mit der Vektoranalysis (mit $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = +$ oder $-\mathbf{m}$) übereinstimmt. Dazu ist aber erforderlich, daß:

$$\beta = 1$$

und zugleich:

$$-\frac{8}{3}\beta^2 = \pm 1$$

ist, was eine Unmöglichkeit ist. In dieser Weise, als direktes Untersystem einer Teilmultiplikation, ist die Vektoranalysis also nicht in der Affinoranalysis enthalten. Wählen wir aber:

$$\alpha = \frac{2}{3}\frac{\beta^2}{\alpha},$$

also:

(107) $$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{2}{3},$$

so ist die Multiplikation ungleicher Einheitsvektoren, soweit es dabei auf Größen erster Ordnung ankommt, bis auf einen Faktor β mit der vektorischen Multiplikation $\times$ wirkungsgleich; ebenso ist die Multiplikation zweier gleicher Einheitsvektoren oder eines Skalars und eines Vektors unter derselben Beschränkung bis auf einen Faktor 2α wirkungsgleich mit der skalaren Multiplikation $\cdot$ (für $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -\mathbf{m}$). Würden wir das System in Beziehung zur skalaren Multiplikation der herkömmlichen Vektoranalysis setzen wollen, in der

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = +\mathbf{m},$$

ist, so müßte eine der Konstanten einen imaginären Wert erhalten. Wir wollen also jedenfalls α und β der Bedingung (107) gemäß wählen, und

die Wahl ferner so treffen, daß die Multiplikationsregeln sich so einfach wie möglich gestalten. Schreibt man diese Multiplikationsregeln für die Einheiten **k**, **i**, **I** und **L** an, so geht unmittelbar hervor, daß dazu

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right. \tag{108}$$

gewählt werden muß.

Behalten wir für $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ einfachheitshalber die Buchstaben α und β bei, so lauten die Multiplikationsregeln des Systems:

$$\left\{\begin{array}{ll|ll} \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 = +\beta\mathbf{i}_3 - \beta\mathbf{I}_3 & & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{i}_2 = -\beta\mathbf{I}_3 + \beta\mathbf{i}_3 & \\ \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 = -\beta\mathbf{i}_3 - \beta\mathbf{I}_3 & & \mathbf{I}_2 \neg \mathbf{i}_1 = +\beta\mathbf{I}_3 + \beta\mathbf{i}_3 & \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{I}_2 = -\beta\mathbf{I}_3 + \beta\mathbf{i}_3 & & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{I}_2 = +\beta\mathbf{i}_3 - \beta\mathbf{I}_3 & \\ \mathbf{i}_2 \neg \mathbf{I}_1 = +\beta\mathbf{I}_3 + \beta\mathbf{i}_3 & & \mathbf{I}_2 \neg \mathbf{I}_1 = -\beta\mathbf{i}_3 - \beta\mathbf{I}_3 & \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 = 2\alpha\mathbf{k} + \alpha\mathbf{L}_2 + \alpha\mathbf{L}_3 & & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{I}_1 = -2\alpha\mathbf{k} - \alpha\mathbf{L} - \alpha\mathbf{L}_3 & \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{I}_1 = \alpha\mathbf{L}_3 - \alpha\mathbf{L}_2 & & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{i}_1 = \alpha\mathbf{L}_3 - \alpha\mathbf{L}_3 & \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{L}_1 = 2\alpha\mathbf{i}_1 & & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{L}_1 = 2\alpha\mathbf{I}_1 & \text{Umgek.} \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{L}_2 = -\alpha\mathbf{i}_1 \pm 3\alpha\mathbf{I}_1 & & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{L}_2 = -\alpha\mathbf{I}_1 \pm 3\alpha\mathbf{i}_1 & \text{untere} \\ \mathbf{i}_1 \neg \mathbf{L}_3 = -\alpha\mathbf{i}_1 \mp 3\alpha\mathbf{I}_1 & & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{L}_3 = -\alpha\mathbf{I}_1 \mp 3\alpha\mathbf{i}_1 & \text{Zeichen.} \\ & & \mathbf{k} \neg \mathbf{i}_1 = -2\alpha\mathbf{i} & \\ \mathbf{L}_1 \neg \mathbf{L}_1 = -4\alpha\mathbf{k} - 2\alpha\mathbf{L}_1 & & \mathbf{k} \neg \mathbf{I}_1 = -2\alpha\mathbf{I}_1 & \text{Kommutativ.} \\ \mathbf{L}_1 \neg \mathbf{L}_2 = +2\alpha\mathbf{k} - 2\alpha\mathbf{L}_3 & & \mathbf{k} \neg \mathbf{L}_1 = -2\alpha\mathbf{L}_1 & \\ \mathbf{L} \neg \mathbf{L}_3 = +2\alpha\mathbf{k} - 2\alpha\mathbf{L}_2 & & \mathbf{k} \neg \mathbf{k} = -2\alpha\mathbf{k} & \end{array}\right\} \text{cycl.} \tag{109}$$

Wir haben damit dem System eine Form gegeben, die sich zu den gerichteten Größen zweiter Ordnung in derselben Weise verhält, wie die durch (92) angegebene Form der Vektoranalysis zu den gerichteten Größen erster Ordnung. Wir können diese Form also als die geometrische Normalform zweiter Ordnung des Systems ansprechen (vgl. S. 18). Die Konstanten α und β nennen wir die Ordnungskonstanten, α der nullten, β der ersten Ordnung. Die Konstante der zweiten Ordnung ist in der Affinoranalysis gleich 1.

Die algebraische Zerlegung der totalen Multiplikation. Die Multiplikation kann, ebenso wie die totale Multiplikation der Vektoranalysis, zerlegt werden. In Anlehnung an die dort verwandte algebra-

ische Zerlegung (S. 34) können wir zunächst den antikommutativen Teil absondern und durch das Zeichen $\bar{\times}$ angeben:

$$\mathbf{A} \,\bar{\times}\, \mathbf{B} = \frac{\mathbf{A} \neg \mathbf{B} - \mathbf{B} \neg \mathbf{A}}{2}. \tag{110}$$

Ferner sondern wir den Teil der Multiplikation ab, der in den Produkten der Einheiten einen Skalar als Faktor oder Produkt aufweist, und geben ihn durch $2\,\bar{\cdot}$ an. Die Produkte von Vektoren und Skalaren in diesen Multiplikationen lauten dann:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{i}_1 \,\bar{\cdot}\, \mathbf{i}_1 = \alpha \mathbf{k} & \mathbf{i}_1 \,\bar{\times}\, \mathbf{i}_1 = 0 \\ \mathbf{k} \,\bar{\cdot}\, \mathbf{i}_1 = -\alpha \mathbf{i}_1 & \mathbf{k} \,\bar{\times}\, \mathbf{i}_1 = 0 \\ \mathbf{i}_1 \,\bar{\cdot}\, \mathbf{k} = -\alpha \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_1 \,\bar{\times}\, \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{i}_1 \,\bar{\times}\, \mathbf{i}_2 = \beta \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_1 \,\bar{\cdot}\, \mathbf{i}_2 = 0 \\ \mathbf{i}_2 \,\bar{\times}\, \mathbf{i}_1 = -\beta \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_2 \,\bar{\cdot}\, \mathbf{i}_1 = 0 \end{array}\right\} \text{cycl.}, \quad \begin{array}{l} \mathbf{k} \,\bar{\cdot}\, \mathbf{k} = -\alpha \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \,\bar{\times}\, \mathbf{k} = 0 \end{array} \tag{111}$$

Identifizieren wir ähnlich wie im ersten Kapitel $\mathbf{k}$ mit -1 (vgl. S. 41), so haben $\bar{\cdot}$ und $\bar{\times}$ hier also dieselbe Wirkung als $\alpha\,\cdot$ und $\beta\,\times$, was wir durch folgende Gleichungen zum Ausdruck bringen:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{\cdot} = \alpha\,\cdot \\ \bar{\times} = \beta\,\times . \end{array}\right. \tag{112}$$

Sowohl $\bar{\cdot}$ als $\bar{\times}$ sind invariant bei Drehungen des Bezugssystems. Der noch übrigbleibende Teil von $\neg$ ist also ebenfalls invariant. Geben wir diesen Teil durch $-\,\mathsf{X}$ [1]) an, so lautet die Zerlegung von $\neg$:

$$\left\{\begin{array}{l} \neg = 2\,\bar{\cdot} + \bar{\times} - \mathsf{X} \\ = 2\alpha\,\cdot + \beta\,\times - \mathsf{X} . \end{array}\right. \tag{113}$$

Die Multiplikation X wollen wir als die d e v i a t o r i s c h e bezeichnen. Die Teilmultiplikationen $\cdot$, $\times$ und X nennen wir die G r u n d m u l t i p l i k a t i o n e n im Gegensatz zur t o t a l e n M u l t i p l i k a t i o n $\neg$ [2]). Die Multiplikation $\ulcorner$, definiert durch

$$\mathbf{A} \ulcorner \mathbf{B} = \mathbf{B} \neg \mathbf{A}, \tag{114}$$

heiße die u m g e k e h r t t o t a l e. Offenbar setzt sie sich folgendermaßen aus den Grundmultiplikationen zusammen:

$$\ulcorner = 2\alpha\,\cdot - \beta\,\times - \mathsf{X} . \tag{115}$$

1) Die Erklärung für die Wahl dieses — Zeichens erfolgt S. 77, die mnemotechnische Bedeutung der Zeichen $\cdot$, $\times$ und X ergibt sich S. 164 u. f.

2) Da es in den hier behandelten Systemen der geometrischen Größen zu jeder Ordnung eine Grundmultiplikation gibt, ist die vielumstrittene Frage nach der Benennung dieser Multiplikationen nur in dem Sinne zu beantworten, daß der Name jeder Multiplikation von dem Namen der zugehörigen Größenart abgeleitet wird.

Nach Ausführung dieser Zerlegung lauten die Multiplikationsregeln des Systems:

$$
(116)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\qquad\quad\ \bar{\times}\quad -\times & \qquad\quad\ \bar{\times}\quad -\times \\
\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_2 = +\beta\mathbf{i}_3 - \beta\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{i}_2 = -\beta\mathbf{I}_3 + \beta\mathbf{i}_3 \\
\mathbf{i}_2 \neg \mathbf{i}_1 = -\beta\mathbf{i}_3 - \beta\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_2 \neg \mathbf{i}_1 = +\beta\mathbf{I}_3 + \beta\mathbf{i}_3 \\
\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{I}_2 = -\beta\mathbf{I}_3 + \beta\mathbf{i}_3 & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{I}_2 = +\beta\mathbf{i}_3 - \beta\mathbf{I}_3 \\
\mathbf{i}_2 \neg \mathbf{I}_1 = +\beta\mathbf{I}_3 + \beta\mathbf{i}_3 & \mathbf{I}_2 \neg \mathbf{I}_1 = -\beta\mathbf{i}_3 - \beta\mathbf{I}_3 \\
\qquad\quad 2\,\bar{\cdot} \qquad\quad \bar{\times} & \qquad\quad 2\,\bar{\cdot} \qquad\quad \bar{\times} \\
\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{i}_1 = 2\alpha\mathbf{k} + \overbrace{\alpha\mathbf{L}_2 + \alpha\mathbf{L}_3} & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{I}_1 = -2\alpha\mathbf{k} - \overbrace{\alpha\mathbf{L}_2 - \alpha\mathbf{L}_3} \\
\multicolumn{2}{c}{\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{I}_1 = \overbrace{\alpha\mathbf{L}_3 - \alpha\mathbf{L}_2}^{\bar{\times}}} \\
\qquad -\times \quad \bar{\times} & \qquad -\times \quad \bar{\times} \\
\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{L}_1 = +2\alpha\mathbf{i}_1 & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{L}_1 = +2\alpha\mathbf{I}_1 \\
\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{L}_2 = -\alpha\mathbf{i}_1 + 3\alpha\mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{L}_2 = -\alpha\mathbf{I}_1 + 3\alpha\mathbf{i}_1 \\
\mathbf{i}_1 \neg \mathbf{L}_3 = -\alpha\mathbf{i}_1 - 3\alpha\mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_1 \neg \mathbf{L}_3 = -\alpha\mathbf{I}_1 - 3\alpha\mathbf{i}_1 \\
\qquad\quad 2\,\bar{\cdot} \qquad -\times & \qquad\quad 2\,\bar{\cdot} \\
\mathbf{L}_1 \neg \mathbf{L}_1 = -4\alpha\mathbf{k} - 2\alpha\mathbf{L}_1 & \mathbf{k} \neg \mathbf{i}_1 = -2\alpha\mathbf{i}_1 \\
\mathbf{L}_1 \neg \mathbf{L}_2 = +2\alpha\mathbf{k} - 2\alpha\mathbf{L}_3 & \mathbf{k} \neg \mathbf{I}_1 = -2\alpha\mathbf{I}_1 \\
\mathbf{L}_1 \neg \mathbf{L}_3 = +2\alpha\mathbf{k} - 2\alpha\mathbf{L}_2 & \mathbf{k} \neg \mathbf{L}_1 = -2\alpha\mathbf{L}_1 \\
 & \mathbf{k} \neg \mathbf{k} = -2\alpha\mathbf{k}
\end{array}
\right\}\ \text{cycl.}\ ^{1)}
$$

Die Multiplikationen $\bar{\cdot}$ und $\times$ sind kommutativ.

Die Vektoranalysis erscheint jetzt als ein Teil der Affinoranalysis, zwar nicht in dem Sinne, daß ihre totale Multiplikation $\dot{\times}$ eine Teilmultiplikation der Affinoranalysis wäre, aber doch insofern jede ihrer Teilmultiplikationen auch in der Affinoranalysis auftritt, ihre Bedeutung für die Multiplikation von Vektoren und Skalaren beibehält und eine erweiterte Bedeutung auch für die Multiplikation dieser Größen mit Deviatoren und von Deviatoren unter sich erhält. Der Teil von $\neg$:

$$2\,\bar{\cdot} + \bar{\times} = 2\alpha\,\cdot + \beta\,\times$$

ist in Gegensatz zu:

$$\dashv\ = \dot{\times} = \cdot + \times$$

nicht assoziativ.

Folgende Tabelle gibt eine Übersicht der Resultate der Multiplika-

1) In einer Analysis, die auch Größen höherer als zweiter Ordnung berücksichtigt, enthält das Produkt eines Vektors und eines Deviators auch noch eine Größe dritter Ordnung (vgl. S. 89).

tionen ·, × und X bei Anwendung auf Skalare, Vektoren und Deviatoren:

·	S	V	D
S	S	V	D
V	V	S	0
D	D	0	S

×	S	V	D
S	0	0	0
V	0	V	D
D	0	D	V

X	S	V	D
S	0	0	0
V	0	D	V
D	0	V	D

Definitionen und Darstellungsweisen. Ein Affinor besteht aus einem Skalarteil, einem Vektorteil und einem Deviatorteil:

i	Vektor	Quaternion	Affinor.
1	Skalar	Quaternion / Tensor	Affinor.
L und **I**	Deviator	Tensor	Affinor.

Als Absolutwert oder Betrag eines Vektors definieren wir die Wurzel aus seiner negativen, und als Absolutwert eines Deviators die Wurzel aus seiner positiven zweiten Potenz. Wir verwenden für den Betrag das Funktionszeichen M oder den unteren Index $_m$:

$$(117)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}\mathbf{a} = a_m = \sqrt{-\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{-\mathbf{a}^{2\cdot}} \\ \mathrm{M}\mathbf{A} = A_m = \sqrt{+\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{\mathbf{A}^{2\cdot}}, \end{cases}$$

wo **A** ein Deviator ist.

Einen Affinor wollen wir in folgender Weise in den Einheiten ausdrücken:

$$(118)\qquad \begin{cases} \mathbf{A} = \alpha A_s + \beta A_{v1}\mathbf{i}_1 + \text{cycl.} + \alpha A_{d1}\mathbf{L}_1 + \text{cycl.} + \beta A_{d4}\mathbf{I}_1 + \text{cycl.} \\ \mathbf{A} = A_{11}\mathbf{I}_{11} + A_{23}\mathbf{I}_{23} + A_{32}\mathbf{I}_{32} + \text{cycl.}, \end{cases}$$

wo:

$$(119)\qquad A_{d1} + A_{d2} + A_{d3} = 0$$

und:

$$(120)\qquad \left.\begin{cases} A_{11} = \dfrac{A_s}{3} - A_{d1} \\ A_{23} = -\dfrac{A_{v1} + A_{d4}}{2} \\ A_{32} = -\dfrac{-A_{v1} + A_{d4}}{2} \end{cases}\right\}\text{cycl.}$$

ist.

Die Funktionszeichen S, V, D und T und die unteren Indizes $_s$, $_v$, $_d$ und $_t$ verwenden wir, um von einem Affinor den Skalar, Vektor, Deviator oder Tensor zu bilden, die wie folgt definiert werden mögen:

$$(121)\quad \begin{cases} \mathrm{S}\,\mathbf{A} = A_s \\ \mathrm{V}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}_v = A_{v1}\mathbf{i}_1 + \text{cycl.} \\ \mathrm{D}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}_d = \alpha A_{d1}\mathbf{L}_1 + \beta A_{d4}\mathbf{J}_1 + \text{cycl.} \\ \mathrm{T}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}_t = \alpha A_s + \mathbf{A}_d. \end{cases}$$

Es ist also:

$$(122)\quad \begin{cases} \mathbf{A} = \alpha \mathrm{S}\mathbf{A} + \beta \mathrm{V}\mathbf{A} + \mathrm{D}\mathbf{A} \\ \quad = \alpha A_s + \beta \mathbf{A}_v + \mathbf{A}_d. \end{cases}$$

Zur Bildung des Konjugierten eines Affinors verwenden wir das Funktionszeichen K und den unteren Index $_k$:

$$(123)\quad \mathrm{K}\mathbf{A} = \mathbf{A}_k = \alpha A_s - \beta \mathbf{A}_v + \mathbf{A}_d.$$

Es ist also:

$$\mathrm{KK}\mathbf{A} = (\mathbf{A}_k)_k = \mathbf{A}.$$

Offenbar gilt für die Multiplikation von Vektoren:

$$(124)\quad \begin{cases} \mathbf{a} \sqsubset \mathbf{b} = \mathrm{K}(\mathbf{a} \sqsupset \mathbf{b}) \\ \mathbf{a} \sqsupset \mathbf{b} = \mathrm{K}(\mathbf{a} \sqsubset \mathbf{b}). \end{cases}$$

Der obere und untere Affinor eines gegebenen Affinors und die zweite totale Multiplikation. Die 9 algebraischen Einheiten des Systems

$$\mathbf{I}_{jk} \qquad j, k = 1, 2, 3,$$

entstehen, wie aus (100) ersichtlich, nicht durch die Multiplikation $\sqsupset$ der Einheitsvektoren $\mathbf{i}$. Wir gelangen aber in folgender Weise zu einer anderen Multiplikation, die wohl zu diesen Einheiten führt.

Voigt hat schon 1904[1]) bemerkt, daß, wo die Bestimmungszahlen eines Tensors $\mathbf{A}$:

$$A_{11},\quad A_{22},\quad A_{33},\quad A_{23} + A_{32},\quad A_{31} + A_{13},\quad A_{12} + A_{21}$$

sich kogredient transformieren zu:

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad 2a_2a_3,\quad 2a_3a_1,\quad 2a_1a_2,$$

auch

$$A_{22} + A_{33},\quad A_{33} + A_{11},\quad A_{11} + A_{22},$$
$$-(A_{23} + A_{32}),\quad -(A_{31} + A_{13}),\quad -(A_{12} + A_{21})$$

sich in derselben Weise transformieren, also ebenfalls einen Tensor bestimmen.

Diesen zweiten Tensor wollen wir den Übergeordneten oder Oberen des ersten nennen, und diesen Begriff in der Weise auf Affinoren ausdehnen, daß wir als oberen Affinor des Affinors:

$$\mathbf{A} = \alpha A_s + \beta \mathbf{A}_v + \mathbf{A}_d$$

1) 04.5.

den Affinor:

$$2\alpha A_s - \beta \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_d = 3\alpha A_s - \mathbf{A}$$

und als unteren den Affinor:

$$\tfrac{1}{2}\alpha A_s - \beta \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_d = \tfrac{3}{2}\alpha A_s - \mathbf{A}$$

ansprechen werden. Die Überordnung bzw. Unterordnung ist eine eindeutig umkehrbare Funktion, die für die Affinoranalysis besonders wichtig ist, und demnach durch ein besonderes Funktionszeichen dargestellt werden mag. Burali Forti und Marcolongo haben die Wichtigkeit dieser Funktion bei Dyaden (vgl. S. 125) erkannt und für sie das Funktionszeichen C gewählt.[1] Dieses Zeichen sei hier für Affinoren übernommen, und die umgekehrte Funktion durch Ɔ angedeutet. Als untere Indizes wählen wir $_c$ und $_{\text{ɔ}}$.[2] Es ist dann:

$$(125)\qquad \begin{cases} \begin{cases} \mathbf{A}_c = \mathrm{C}\mathbf{A} = 2\alpha A_s - \beta \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_d = 3\alpha A_s - \mathbf{A} \\ \mathbf{A}_{\text{ɔ}} = \text{Ɔ}\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\alpha A_s - \beta \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_d = \tfrac{3}{2}\alpha A_s - \mathbf{A} \end{cases} \\ \mathrm{C}\text{Ɔ}\mathbf{A} = \text{Ɔ}\mathrm{C}A = \mathbf{A}. \end{cases}$$

Für Kombinationen von K, C und Ɔ gilt offenbar:

$$(126)\qquad \begin{aligned} \mathrm{CK}\mathbf{A} &= \mathrm{KC}\mathbf{A} \\ \text{Ɔ}\mathrm{K}\mathbf{A} &= \mathrm{K}\text{Ɔ}\mathbf{A}. \end{aligned}$$

In derselben Weise, wie es möglich ist, zu einem gegebenen Affinor den über- bzw. untergeordneten Affinor zu bilden, können wir auch zu jeder aus $\cdot$, $\times$ und X zusammengesetzten Multiplikation eine über- bzw. untergeordnete Multiplikation bilden, indem wir einen Skalar-, einen Vektor-, und einen Deviatorteil der Multiplikation unterscheiden. Da $\cdot$, $\times$ und X einzeln invariant sind, ist die Neubildung auch jedenfalls invariant. Bilden wir die untergeordnete Multiplikation zu

$$\neg \;=\; 2\,\bar{\cdot} \;+\; \bar{\times} \;-\; \underset{\cdot}{\mathsf{X}},$$

dann entsteht:

$$\bar{\cdot} \;-\; \bar{\times} \;+\; \mathsf{X}.$$

---

1) 09.12, S. 60, sie nennen die Funktion „cyclique“.

2) Als Zeichen der konjugierten Funktion bei Quaternionen wählte Hamilton K (53.1, S. 86). Gibbs verwendete später für Dyaden den untereren Index $_c$ (84.2, 06.1, S. 59). Burali Forti und Marcolongo kehrten wieder zu dem Zeichen K zurück (09.12, S. 17). Dieses Zeichen ist auch hier beibehalten. Dazu ist der untere Index $_k$ eingeführt, da wir grundsätzlich jedem Funktionszeichen einen solchen Index zuordnen. Der Buchstabe C, der sich in Druck und Schrift in derselben Weise und ohne Schwierigkeit umkehren läßt, wird dadurch frei für die Funktion der Überordnung.

Führen wir für diese Multiplikation das Zeichen $\lrcorner$ ein, das durch Umklappen nach unten aus $\urcorner$ entsteht:

$$\lrcorner = \div \quad - \bar{\times} \quad + \times , \tag{127}$$

so haben wir in der umgekehrten Multiplikation, die die Einfachsumme der Multiplikationen $\div$, $\bar{\times}$ und $\times$ ist:

$$\urcorner = \div \quad + \bar{\times} \quad + \times , \tag{128}$$

eine Verknüpfungsweise erhalten, die von den Einheitsvektoren $\mathbf{i}$ sofort zu den negativ genommenen algebraischen Einheiten $\mathbf{I}_{jk}$ führt. Denn es ist:

$$\begin{cases} \mathbf{i}_1 \llcorner \mathbf{i}_2 = -\mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{i}_2 \llcorner \mathbf{i}_1 = -\mathbf{J}_{21} \\ \mathbf{i}_1 \llcorner \mathbf{i}_1 = -\mathbf{J}_{11}. \end{cases} \tag{129}$$

Die Multiplikationsregeln von $\llcorner$ gehen aus folgender Tabelle hervor:

$$\left.\begin{array}{l|l}
\qquad\qquad \bar{\times} \quad \times & \qquad\qquad \bar{\times} \quad \times \\
\mathbf{i}_1 \llcorner \mathbf{i}_2 = +\beta\mathbf{i}_3 + \beta\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_1 \llcorner \mathbf{i}_2 = -\beta\mathbf{I}_3 - \beta\mathbf{i}_3 \\
\mathbf{i}_2 \llcorner \mathbf{i}_1 = -\beta\mathbf{i}_3 + \beta\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_2 \llcorner \mathbf{i}_1 = +\beta\mathbf{I}_3 - \beta\mathbf{i}_3 \\
\mathbf{i}_1 \llcorner \mathbf{I}_2 = -\beta\mathbf{I}_3 - \beta\mathbf{i}_3 & \mathbf{I}_1 \llcorner \mathbf{I}_2 = +\beta\mathbf{i}_3 + \beta\mathbf{I}_3 \\
\mathbf{i}_2 \llcorner \mathbf{I}_1 = +\beta\mathbf{I}_3 - \beta\mathbf{i}_3 & \mathbf{I}_2 \llcorner \mathbf{I}_1 = -\beta\mathbf{i}_3 + \beta\mathbf{I}_3 \\
\qquad\qquad \div \quad \times & \qquad\qquad \div \quad \times \\
\mathbf{i}_1 \llcorner \mathbf{i}_1 = \alpha\mathbf{k} + \alpha\mathbf{L}_1 & \mathbf{I}_1 \llcorner \mathbf{I}_1 = -\alpha\mathbf{k} - \alpha\mathbf{L}_1 \\
\multicolumn{2}{c}{\mathbf{i}_1 \llcorner \mathbf{I}_1 = \overbrace{\alpha\mathbf{L}_3 - \alpha\mathbf{L}_2}^{\bar{\times}}} \\
\qquad\quad \times \qquad \bar{\times} & \qquad\quad \times \qquad \bar{\times} \\
\mathbf{i}_1 \llcorner \mathbf{L}_1 = -2\alpha\mathbf{i}_1 & \mathbf{I}_1 \llcorner \mathbf{L}_1 = -2\alpha\mathbf{I}_1 \\
\mathbf{i}_1 \llcorner \mathbf{L}_2 = +\alpha\mathbf{i}_1 + 3\alpha\mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_1 \llcorner \mathbf{L}_2 = +\alpha\mathbf{I}_1 + 3\alpha\mathbf{i}_1 \\
\mathbf{i}_1 \llcorner \mathbf{L}_3 = +\alpha\mathbf{i}_1 - 3\alpha\mathbf{I}_1 & \mathbf{I} \llcorner \mathbf{L}_3 = +\alpha\mathbf{I}_1 - 3\alpha\mathbf{i}_1 \\
 & \qquad\qquad \div \\
\qquad\qquad \div \qquad \times & \mathbf{k} \llcorner \mathbf{i}_1 = -\alpha\mathbf{i}_1 \\
\mathbf{L}_1 \llcorner \mathbf{L}_1 = -2\alpha\mathbf{k} + 2\alpha\mathbf{L}_1 & \mathbf{k} \llcorner \mathbf{J}_1 = -\alpha\mathbf{I}_1 \\
\mathbf{L}_1 \llcorner \mathbf{L}_2 = +\ \alpha\mathbf{k} + 2\alpha\mathbf{L}_3 & \mathbf{k} \llcorner \mathbf{L}_1 = -\alpha \\
\mathbf{L}_1 \llcorner \mathbf{L}_3 = +\ \alpha\mathbf{k} + 2\alpha\mathbf{L}_2 & \mathbf{k} \llcorner \mathbf{k} = -\alpha\mathbf{k}
\end{array}\right\} \text{cycl.} \tag{130}$$

Diese Tabelle gestattet eine noch bessere Übersicht über die Produkte der Affinoranalysis als (116).

Im Gegensatz zur totalen Multiplikation $\urcorner$ wollen wir $\llcorner$ die zweite totale nennen. Es mag hervorgehoben werden, daß diese Multiplikation nicht assoziativ ist. Die totalen Multiplikationen $\urcorner$ und $\llcorner$ sind für die Analysis gleich wichtig.

Führt die Multiplikation $\urcorner$ ($\ulcorner$) zweier Vektoren zu einem Affinor **C**:

$$(131)\quad \begin{cases} \mathbf{a} \urcorner \mathbf{b} = 2\alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \beta \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \between \mathbf{b} = \mathbf{C} \\ \text{bzw.:} \\ \mathbf{a} \ulcorner \mathbf{b} = 2\alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \beta \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \between \mathbf{b} = \mathbf{C}, \end{cases}$$

so führt $\lrcorner$ ($\llcorner$), die untere Multiplikation von $\urcorner$ ($\ulcorner$), auch zu dem unteren Affinor von **C**, denn es ist

$$(132)\quad \begin{cases} \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{b} = \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \beta \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \between \mathbf{b} = \mathrm{O}\mathbf{C} \\ \text{bzw.:} \\ \mathbf{a} \llcorner \mathbf{b} = \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \beta \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \between \mathbf{b} = \mathrm{O}\mathbf{C} \end{cases}$$

Es ist zu beachten, daß diese Eigenschaft nur gilt, wenn die Faktoren beide Vektoren sind.

Die abgeleiteten Multiplikationen. Wir haben bis jetzt 4 totale Multiplikationen $\urcorner$, $\ulcorner$, $\llcorner$ und $\lrcorner$, 3 Grundmultiplikationen $\cdot$, $\times$ und $\between$, und außer M bzw. $_m$, 7 Funktionen S bzw. $_s$, V bzw. $_v$, D bzw. $_d$, T bzw. $_t$, K bzw. $_k$, C bzw. $_c$ und O bzw. $_o$ kennen gelernt. Durch Kombination der totalen Multiplikationen und der 7 Funktionen erhalten wir dazu noch in ähnlicher Weise wie auf S. 35 abgeleitete Multiplikationen. Wir wählen für diese folgende Bezeichnungen:

$$(133)\quad \begin{array}{l|l}
(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B})_s = \mathrm{S}(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \ulcorner\!\urcorner \mathbf{B}^{1)} & (\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B})_s = \mathrm{S}(\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \llcorner\!\lrcorner \mathbf{B} \\
(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B})_v = \mathrm{V}(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \overset{\times}{\urcorner} \mathbf{B} & (\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B})_v = \mathrm{V}(\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \underset{\times}{\llcorner} \mathbf{B} \\
(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B})_d = \mathrm{D}(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \overset{\between}{\urcorner} \mathbf{B} & (\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B})_d = \mathrm{D}(\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \underset{\between}{\llcorner} \mathbf{B} \\
(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B})_t = \mathrm{T}(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \top \mathbf{B} & (\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B})_t = \mathrm{T}(\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \\
(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B})_k = \mathrm{K}(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \overset{k}{\urcorner} \mathbf{B} & (\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B})_k = \mathrm{K}(\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \underset{k}{\llcorner} \mathbf{B} \\
(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B})_c = \mathrm{C}(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \overset{c}{\urcorner} \mathbf{B} & (\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B})_c = \mathrm{C}(\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \underset{c}{\llcorner} \mathbf{B} \\
(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B})_o = \mathrm{O}(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \overset{o}{\urcorner} \mathbf{B} & (\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B})_o = \mathrm{O}(\mathbf{A} \llcorner \mathbf{B}) = \mathbf{A} \underset{o}{\llcorner} \mathbf{B}.
\end{array}$$

Für die Multiplikation von Vektoren, und nur für diese, gilt, wie wir sahen:

$$(134)\quad \begin{aligned} \mathrm{S}\mathbf{a} \llcorner \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathrm{V}\mathbf{a} \llcorner \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ \mathrm{D}\mathbf{a} \llcorner \mathbf{b} &= \mathbf{a} \between \mathbf{b} \\ \mathrm{K}\mathbf{a} \llcorner \mathbf{b} &= \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{b} \\ \mathrm{C}\mathbf{a} \llcorner \mathbf{b} &= \mathbf{a} \ulcorner \mathbf{b}, \end{aligned}$$

sodaß hier die Zeichen $\llcorner\!\lrcorner$, $\underset{\times}{\llcorner}$, $\underset{\between}{\llcorner}$, $\underset{k}{\llcorner}$ und $\underset{c}{\llcorner}$ nicht nötig sind, und

1) Da die Multiplikationen $\ulcorner\!\urcorner$ und $\llcorner\!\lrcorner$ offenbar kommutativ sind, ist dies in ihrem Zeichen durch symmetrische Ergänzung zum Ausdruck zu bringen.

durch $\cdot$, $\times$, X, $\lrcorner$ und $\ulcorner$ ersetzt werden können. Für die Multiplikation anderer Größen sind sie aber nicht zu ersetzen. Auch können sie nicht wie die totalen Multiplikationen als Vielfachsumme der Grundmultiplikationen $\cdot$, $\dot{\times}$ und X angegeben werden.[1])

Grundmultiplikationen, totale Multiplikationen und abgeleitete Multiplikationen beherrschen zusammen das ganze Gebiet der Affinoranalysis (vgl. S. 36).

Die Deutung der Zahlen als gerichtete Größen und ihrer Kombinationen mit Multiplikationen als Operatoren. Wie in der Vektoranalysis werden wir einer doppelten Deutung begegnen, der Deutung der Zahlen als gerichtete Größen und der Deutung der Kombinationen einer Zahl mit einer Multiplikation als Operatoren.

Zur Deutung als Größen bemerken wir, daß die Bestimmungszahlen eines Tensors:

$$A_{11}, \quad A_{22}, \quad A_{33}, \quad 2\,A_{23}, \quad 2\,A_{31}, \quad 2\,A_{12}$$

sich transformieren wie:

$$a_1^2, \quad a_2^2, \quad a_3^2, \quad 2\,a_2 a_3, \quad 2\,a_3 a_1, \quad 2\,a_1 a_2.$$

Nun ist es eine bekannte Tatsache, daß sich die sechs Koeffizienten der Gleichung einer Fläche zweiten Grades:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\,a_{23}yz + 2\,a_{31}zx + 2\,a_{12}xy = \pm 1$$

---

1) Suchen wir z. B. die Multiplikation $\overset{2}{\urcorner}$ zu zerlegen, so gelingt dies nur, indem wir eine andere skalare Grundmultiplikation $\bar{\odot}$ einführen durch die Regeln:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{k}\,\bar{\odot}\,\mathbf{k} = -\alpha\mathbf{k} & \mathbf{k}\,\bar{\odot}\,\mathbf{i}_1 = +2\alpha\mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_1\,\bar{\odot}\,\mathbf{i}_1 = \alpha\mathbf{k} & \mathbf{k}\,\bar{\odot}\,\mathbf{L}_1 = +2\alpha\mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_1\,\bar{\odot}\,\mathbf{L}_1 = -2\alpha\mathbf{k} & \mathbf{k}\,\bar{\odot}\,\mathbf{I}_1 - +2\alpha\mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_1\,\bar{\odot}\,\mathbf{I}_1 = -\alpha\mathbf{k} & \end{array}$$

statt:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{k} \div \mathbf{k} = -\alpha\mathbf{k} & \mathbf{k} \div \mathbf{i}_1 = -\alpha\mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_1 \div \mathbf{i}_1 = \alpha\mathbf{k} & \mathbf{k} \div \mathbf{L}_1 = -\alpha\mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_1 \div \mathbf{L}_1 = -2\alpha\mathbf{k}. & \mathbf{k} \div \mathbf{I}_1 = -\alpha\mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_1 \div \mathbf{I}_1 = -\alpha\mathbf{k} & \end{array}$$

Es ist dann:

$$\overset{2}{\urcorner} = \bar{\odot} + \bar{\times} + \mathsf{X}\,.$$

Überall, wo nicht Skalare mit anderen Größen multipliziert werden, ist $\overset{2}{\urcorner}$ also wirkungsgleich mit $\llcorner\!\!\lrcorner$. Die Multiplikation $\odot$, verbunden mit der skalaren Einheit führt einen Affinor in das Zweifache seines unteren Affinors über:

$$1 \odot \mathbf{A} = 2\,\mathbf{A}_{\circ}.$$

bei Drehung des Bezugssystems in derselben Weise transformieren. Bildet man also die Fläche zweiten Grades:

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{23}yz + 2A_{31}zx + 2A_{12}xy = \pm 1, \tag{135}$$

so ist das Resultat unabhängig vom Bezugssystem. Die Fläche kann stets durch geeignete Wahl des + oder — Zeichens reell gemacht werden. Trifft man dabei noch die Verabredung, bei der Wahl zwischen einem einschaligen und einem zweischaligen Hyperboloid stets das einschalige zu wählen, so ist dadurch jedem reellen Tensor eine reelle Mittelpunktsfläche zweiten Grades eindeutig umkehrbar zugeordnet. Die Fläche gibt die Orientierung des Tensors an und heißt seine Richtungsfläche. Einem Deviator entspricht eine Richtungsfläche, in deren Gleichung die Summe der Koeffizienten von x^2, y^2 und z^2 Null ist, die also jedenfalls ein einschaliges Hyperboloid ist.

Da sich die Gleichung jeder Mittelpunktsfläche zweiten Grades in die Form

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = \pm 1$$

bringen läßt, kann jeder Deviator die Form

$$a\mathbf{L}_1 + b\mathbf{L}_2 + c\mathbf{L}_3$$

und demnach jeder Tensor die Form

$$A_1\mathbf{I}_{11} + A_2\mathbf{I}_{22} + A_3\mathbf{I}_{33}$$

annehmen, indem man das Bezugssystem in die Richtung der Hauptachsen der Richtungsfläche legt. Jeder Deviator ist also, da

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 = 0 \tag{105}$$

ist, auf die Vielfachsumme zweier Einheitsdeviatoren erster Art zurückzuführen.

Aus dieser Eigenschaft läßt sich eine einfache Schreibweise für den allgemeinen Deviator ableiten. Setzt man nämlich für einen Deviator $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \alpha A_{d1}\mathbf{L}_1 + \alpha A_{d2}\mathbf{L}_2 + \alpha A_{d3}\mathbf{L}_3 = \mathbf{b} \times \mathbf{c},$$

so gestattet diese Gleichung die bis auf einen Zahlenfaktor eindeutige reelle Lösung nach $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$. Denn nehmen wir z. B. an, daß:

$$A_{d1} \leqq A_{d2} \leqq A_{d3},$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} b_1c_1 &= A_{d1} + p & \quad b_2c_3 + b_3c_2 &= 0 \\ b_2c_2 &= A_{d2} + p & \quad b_3c_1 + b_1c_3 &= 0 \\ b_3c_3 &= A_{d3} + p & \quad b_1c_2 + b_2c_1 &= 0; \end{aligned}$$

wo p eine beliebige gewöhnliche Zahl ist. Daher folgt:

$$\frac{b_1}{b_2} = -\frac{c_1}{c_2}, \text{ cycl.}$$

Es muß also entweder $\frac{b_1}{b_2}$ oder $\frac{b_2}{b_3}$ oder $\frac{b_3}{b_1}$ gleich Null sein. Ist:

$$\frac{b_2}{b_3} = -\frac{c_2}{c_3} = 0,$$

also:

$$b_2 = c_2 = 0,$$

so ist $p = -A_{d2}$ und

$$b_1 = q\sqrt{A_{d2} - A_{d1}} \qquad c_1 = -\frac{1}{q}\sqrt{A_{d2} - A_{d1}}$$

$$b_3 = q\sqrt{A_{d3} - A_{d2}} \qquad c_3 = +\frac{1}{q}\sqrt{A_{d3} - A_{d2}},$$

wo q eine beliebige Konstante ist. Jede andere Annahme, z. B. $b_1 = c_1 = 0$, würde aber bei $A_{d1} \leqq A_{d2} \leqq A_{d3}$ zu komplexen Werten von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ führen. Jeder reelle Deviator läßt sich also in einer, und bis auf einen Zahlenfaktor nur in einer Weise, als deviatorisches Produkt zweier reeller Vektoren ausdrücken:

$$\text{(136)} \qquad \mathsf{A} = \mathfrak{b} \curlyvee \mathfrak{c}.^{1)}$$

Die beiden Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ haben wichtige geometrische Eigenschaften.[2]) Bekanntlich gibt es zu jeder Fläche zweiten Grades zwei Scharen von parallelen Ebenen, deren Schnitte mit der Fläche Kreise sind. Unterscheiden sich die Gleichungen von zwei Flächen nur durch ein Vielfaches von $x^2 + y^2 + z^2$ im linken Glied, gehören sie demnach zu Tensoren mit demselben Deviatorteil, so besitzen sie dieselben Scharen. Die Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ stehen nun auf diesen Scharen senkrecht.

Der allgemeine Deviator ist also deviatorisches Produkt zweier Vek-

1) Wilson hat (01. 2 S. 272) bei der Besprechung der dyadischen Produkte zweier Vektoren die Bemerkung gemacht:

> „The most general product conceivable ought to have the property that when the product is known the two factors are also known. Certainly no product could be more general."

Das dyadische Produkt (S. 25) hat nun diese Eigenschaft bis auf einen Zahlenfaktor. Es zeigt sich aber hier, daß das Produkt in der Grundmultiplikation $\curlyvee$ dieselbe Eigenschaft hat, und es ist leicht einzusehen, daß dasselbe auch gilt für das Produkt in $\times$. Das allgemeinste Produkt zweier Vektoren ist aber jedenfalls Summe eines Skalars, eines Vektors und eines Deviators (vgl. S. 64), so daß sich die erwähnte Eigenschaft nicht als Kriterium der Allgemeinheit eines Produktes aufrecht erhalten läßt.

2) Wilson 01. 2 S. 383.

toren, und ist durch die Richtung dieser Vektoren und seinen Absolutwert vollständig bestimmt. Die beiden Vektoren nennen wir die bestimmenden Vektoren und die zu ihnen senkrechte Gerade die Achse des Deviators. Liegen die bestimmenden Vektoren nicht in einer Geraden, so geben wir einen Deviator an durch eine Gerade in Richtung der Achse, deren Länge gleich dem mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ multiplizierten Produkte der Absolutwerte der bestimmenden Vektoren ist, und an deren Ende zwei Pfeile in Richtung der bestimmenden Vektoren angebracht sind. Stehen die bestimmenden Vektoren senkrecht aufeinander, so ist die Länge der Linie gleich dem Absolutwerte des Deviators (Fig. 5).

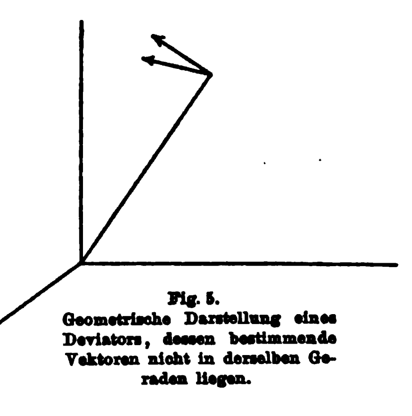


Fig. 5. Geometrische Darstellung eines Deviators, dessen bestimmende Vektoren nicht in derselben Geraden liegen.

Liegen sie aber in einer Geraden, so wird der Deviator angegeben durch zwei Pfeile in Richtung dieser Geraden, deren Länge jede gleich dem mit $\frac{1}{\sqrt{8}}$ multiplizierten obenerwähnten Produkte, also gleich dem mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ multiplizierten Absolutwerte des Deviators ist. Diese Pfeile haben entweder entgegengesetzte Richtung, oder fallen zu einem Doppelpfeil zusammen (Fig. 6).

Als Beispiel sind in Fig. 7 die Einheitsdeviatoren **L** und **I** angegeben.

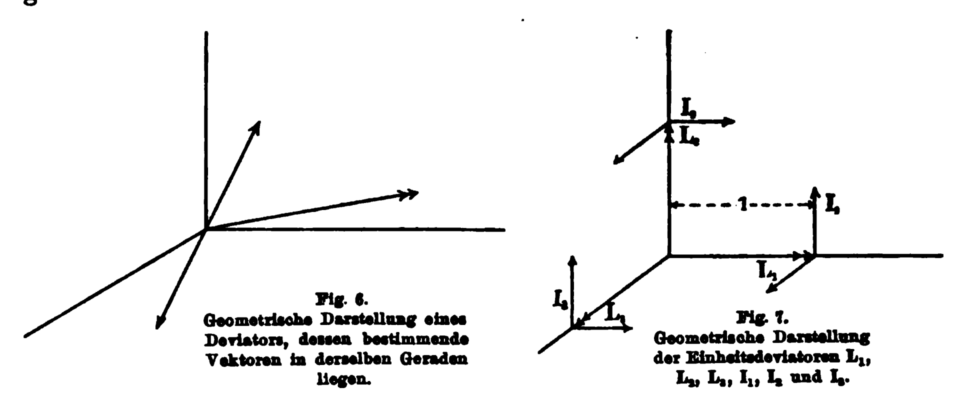


Fig. 6. Geometrische Darstellung eines Deviators, dessen bestimmende Vektoren in derselben Geraden liegen.

Fig. 7. Geometrische Darstellung der Einheitsdeviatoren L_1, L_2, L_3, I_1, I_2 und I_3.

Liegen die beiden bestimmenden Vektoren in einer Geraden, so ist der Deviator ein Einfacher erster Art, wie z. B. L_1, stehen sie dagegen senkrecht aufeinander, so ist er ein Einfacher zweiter Art wie z. B. I_1. Einfache Deviatoren erster Art lassen sich nicht wie Vektoren zusammenstellen,

da aber ein jeder derartiger Deviator in der 1—2 Ebene sich ausdrücken läßt in $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ und $\mathbf{I}_3$, z. B. (Fig. 8):

$$\text{(137)}\quad \begin{cases} \mathbf{L}_\varphi = \frac{1}{\alpha}\,(\mathbf{i}_1 \cos\varphi + \mathbf{i}_2 \sin\varphi) \times (\mathbf{i}_1 \cos\varphi + \mathbf{i}_2 \sin\varphi) \\ \quad = \mathbf{L}_1 \cos^2\varphi + \mathbf{L}_2 \sin^2\varphi + \frac{\alpha}{\beta}\,\mathbf{I}_3 \sin 2\varphi, \end{cases}$$

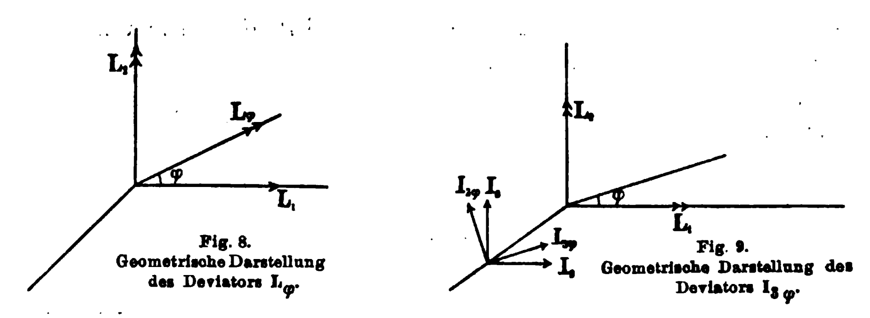


Fig. 8. Geometrische Darstellung des Deviators $\mathbf{L}_\varphi$.

Fig. 9. Geometrische Darstellung des Deviators $\mathbf{I}_{3\varphi}$.

besteht zwischen je 4 in einer Ebene liegenden einfachen Deviatoren erster Art eine lineare Beziehung.

Einfache Deviatoren zweiter Art sind in einfacher Weise auf die erster Art zurückzuführen. Nennt man den Deviator, der aus $\mathbf{I}_3$ durch Drehung um $\mathbf{i}_3$ um einen Winkel φ in der $1 \rightarrow 2$-Richtung hervorgeht, vorübergehend $\mathbf{I}_{3\varphi}$ (Fig. 9), so ist offenbar:

$$\text{(138)}\quad \begin{cases} \mathbf{I}_{3\varphi} = \frac{1}{\beta}\,(\mathbf{i}_1 \cos\varphi + \mathbf{i}_2 \sin\varphi) \times (-\,\mathbf{i}_1 \sin\varphi + \mathbf{i}_2 \cos\varphi) \\ \quad = \mathbf{I}_3 \cos 2\varphi + \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1}{2} \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Wird $\varphi = 45^0$, so ist also:

$$\text{(139)}\qquad \mathbf{I}_{3\varphi} = \alpha\beta(\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1).$$

Führen wir für die in Fig. 10 angegebenen um den Winkel φ in der $1 \rightarrow 2$-Richtung gedrehten einfachen Deviatoren zweiter Art $\mathbf{I}_1$ und $\mathbf{I}_2$ vorübergehend die Zeichen $\mathbf{I}_{1\varphi}$ bzw. $\mathbf{I}_{2\varphi}$ ein (Fig. 10), so ist:

Fig. 10. Geometrische Darstellung der Deviatoren $\mathbf{I}_{1\varphi}$ und $\mathbf{I}_{2\varphi}$.

$$\text{(140)}\quad \begin{cases} \mathbf{I}_{1\varphi} = \frac{1}{\beta}\,(-\,\mathbf{i}_1 \sin\varphi + \mathbf{i}_2 \cos\varphi) \times \\ \qquad \times\, \mathbf{i}_3 = \mathbf{I}_1 \cos\varphi - \mathbf{I}_2 \sin\varphi \\ \mathbf{I}_{2\varphi} = \frac{1}{\beta}\,(\mathbf{i}_1 \cos\varphi + \mathbf{i}_2 \sin\varphi) \times \\ \qquad \times\, \mathbf{i}_3 = \mathbf{I}_1 \sin\varphi + \mathbf{J}_2 \cos\varphi. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt die wichtige Regel, daß zwei einfache Deviatoren zweiter Art, bei denen die Richtung von einem der bestimmenden Vektoren übereinstimmt sich wie Vektoren zusammenstellen lassen. Die Richtungssinne der zusammenstellenden Vektoren sind dabei so zu wählen, daß sie gleich werden, wenn die beiden einfachen Deviatoren durch Drehung zum Zusammenfallen gebracht werden. Die Größe der Vektoren ist dem Absolutwert der Deviatoren gleich zu nehmen. In Fig. 11 ist die Zusammenstellung zweier einfacher Deviatoren **A** und **B** zu einem einfachen Deviator **C** zur Darstellung gebracht.

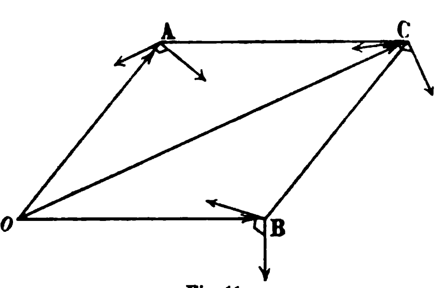


Fig. 11.
Zusammenstellung zweier einfacher Deviatoren zweiter Art.

Die Deutung der Kombinationen einer Zahl mit einer Multiplikation wird am besten in der Dyadenrechnung behandelt, deren Erwähnung erst im vierten Kapitel stattfindet, nur ein kleiner Teil derselben, der unmittelbar mit der Deutung der vektoranalytischen Operatoren in Beziehung steht, mag hier vorangeschickt werden. Halten wir fest an der S. 38 gegebenen Definition eines einfachen Operators, so ergibt sich aus (130), daß, wie in der Vektoranalysis, ein einfacher Operator nur aus Teilen bestehen kann, von denen jeder mit der zu ihm gehörigen Multiplikation verbunden ist, also aus Skalaren mit $\cdot$, Vektoren mit $\times$ und Deviatoren mit X. Wir können die S. 42 ausgesprochene Regel also erweitern:

> Regel: In dem assoziativen System der geometrischen Größen bis zur zweiten Ordnung sind in einem einfachen Operator die Teile verschiedener Ordnung jeder nur mit der zu ihm gehörigen Grundmultiplikation verbunden.

Man erhält einen solchen Operator offenbar wie in der Vektoranalysis durch Anwendung einer abgeleiteten Multiplikation, z. B.:

$$(141) \qquad \mathbf{A} \llcorner\!\!\times\!\!\lrcorner\, \mathbf{b} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{3} A_s \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{A}_v \times \mathbf{b} + \mathbf{A}_d \, X \, \mathbf{b}\right).$$

Die Deutung der einfachen Operatoren $\mathbf{i}_1 \times$, cycl. und $\frac{1}{\beta}\mathbf{I}_1 \, X$, cycl. läßt sich aus Fig. 12 entnehmen. Der einfache Operator $\frac{1}{\beta}\mathbf{I}_1 \, X$ dreht, wie aus (130) ersichtlich, den Vektor $\mathbf{i}_2$ um 90^0 in der $3 \longrightarrow 2$-Richtung nach $-\mathbf{i}_3$ und $\mathbf{i}_3$ in der umgekehrten Richtung nach $-\mathbf{i}_2$. In derselben Weise wie wir also einem Vektor einen Drehpfeil zuordnen, der seine Wirkung auf Vektoren in der zu ihm senkrechten Ebene angibt,

ordnen wir einem einfachen Operator dieser Art ein System von Doppelpfeilen zu, das seine Wirkung auf Vektoren senkrecht auf seine Achse veranschaulicht. Diese Pfeile zeigen, wie ersichtlich, stets in diejenige Richtung, die ein Auseinanderbiegen der bestimmenden Vektoren angibt. Der Vektor $\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$ bleibt bei der Wirkung von $\frac{1}{\beta}\mathbf{I}_1 \mathsf{X}$ ungeändert, und $\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$ wird in seiner Richtung umgekehrt.

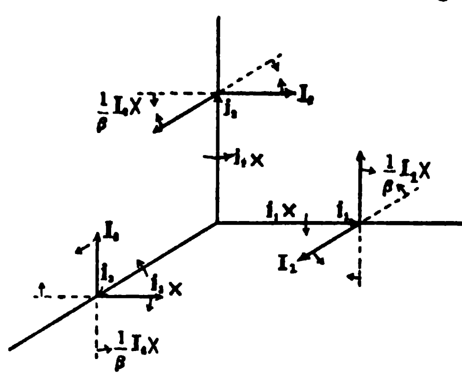


Fig. 12. Geometrische Deutung der Zahlen $\mathbf{i}$ und $\mathbf{I}$ und der Operatoren $\mathbf{i}\times$ und $\frac{1}{\beta}\mathbf{I}\,\mathsf{X}$. (Vgl. Fig. 4, S. 42.)

Nun geben aber die Drehpfeile der Vektoren sowie die Doppelpfeile der Deviatoren der Fig. 12 nicht nur die Wirkung ihrer einfachen Operatoren auf bestimmte Vektoren an, sondern, wie aus (130) hervorgeht, auch die Wirkung auf diejenigen einfachen Deviatoren zweiter Art, von denen ein bestimmender Vektor in der Richtung des Vektors bzw. der Achse des Deviators liegt. Denn es ist z. B.:

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_3$$
$$\frac{1}{\beta}\mathbf{I}_1 \,\mathsf{X}\, \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_3$$

Die Pfeile in Fig. 12 geben also die Wirkung der Einheitsoperatoren zugleich für beide Fälle.

Die Systeme der geometrischen Größen höherer Ordnung. Das assoziative System der geometrischen Größen bis zur zweiten Ordnung und die algebraische Zerlegung seiner totalen Multiplikation ist hiermit abgeleitet. Die Betrachtung läßt sich in der einfachsten Weise auf Systeme höherer Ordnung ausdehnen. Zur Ableitung des Systems dritter Ordnung betrachten wir die Produkte von vier Vektoren. Von den dabei auftretenden Größen enthalten diejenigen, deren 15 Komponenten sich transformieren wie

$$a_1^4,\ a_2^4,\ a_3^4,\ a_1^3a_2,\ a_1^3a_3,\ a_2^3a_3,\ a_2^3a_1,\ a_3^3a_1,\ a_3^3a_2,\ a_1^2a_2a_3,$$
$$a_2^2a_3a_1,\ a_3^2a_1a_2,\ a_1^2a_2^2,\ a_2^2a_3^2,\ a_3^2a_1^2,$$

im allgemeinen noch einen Tensor.

Denn

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

ist invariant, und die Zahlen:

$$(a_1^4 + a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_3^2),\ \text{cycl.},\ (2a_2a_3a_1^2 + 2a_2^3a_3 + 2a_2a_3^3),\ \text{cycl.}$$

sind demnach kogredient mit:

$$a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ 2a_2a_3,\ 2a_3a_1,\ 2a_1a_2.$$

Der übrigbleibende Teil, eine Größe vierter Ordnung, die in neun Einheiten angegeben werden kann, wird Null gesetzt, und auf den Rest der Analysis das assoziative Gesetz angewandt. Identifiziert man dabei, bis auf einen Zahlenfaktor, grundsätzlich alle Größen gleicher rotationaler Orientierung, so entsteht die Analysis der geometrischen Größen bis zur dritten Ordnung, die 16 Einheiten enthält und ein ursprüngliches System vierter Ordnung zur Grundlage hat. Sie befaßt sich mit Skalaren in einer Einheit, Vektoren in drei Einheiten, Deviatoren in fünf Einheiten, und, sagen wir z. B. Septoren, in sieben Einheiten. Ihre totale Multiplikation $\multimap$ ist die Vielfachsumme von vier Grundmultiplikationen:

$$\multimap = \gamma \cdot + \delta \times + \varepsilon\, \mathsf{X} + \overset{1}{\multimap}, \tag{142}$$

wo $\overset{1}{\multimap}$ das Zeichen der septorischen Multiplikation vertritt.

Zur Ableitung der nächsthöheren Analysis ist dasselbe Verfahren anzuwenden. Es treten Größen vierter Ordnung in neun Einheiten, Nonoren, mit einer neuen zu ihnen gehörigen Grundmultiplikation, der nonorischen, hinzu. Das System ist ein ursprüngliches fünfter Ordnung.

In derselben Weise kann man fortfahren, und erhält so eine Reihe von Analysen, die alle im organischen Zusammenhang stehen, und sich nur unterscheiden durch die Anzahl der verwandten Grundmultiplikationen. Aus der Invarianz von $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^n$ folgt, in ähnlicher Weise wie auf S. 70, daß sich zu jedem Bezugssystem Sätze von orthogonalen Einheiten dritter und höherer Ordnung angeben lassen. Die auf S. 49 gemachte Bemerkung tritt jetzt ins volle Licht, denn die Vektoranalysis erscheint in der Tat als erste einer Reihe von Analysen und zwar nur, wenn

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -1$$

gesetzt wird. Schon dieser Umstand allein würde die Wahl des Vorzeichens nicht mehr zweifelhaft erscheinen lassen.

Größen höherer als vierter Ordnung treten zurzeit in der Physik nicht auf, und das Skalare bis Nonoren enthaltende System dürfte demnach vorläufig genügen. Die Triaden und Tetraden, durch Gibbs angedeutet, enthalten einen Teil der Operatoren der Systeme dritter und vierter Ordnung. Die Triaden enthalten einen skalaren, drei verschiedene vektorische, zwei verschiedene deviatorische und einen septorischen Operator, wodurch sich die Zahl ihrer Einheiten zu:

$$1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 7 = 27$$

stellt. Die Tetraden enthalten drei verschiedene skalare, sechs verschiedene vektorische, sechs verschiedene deviatorische, drei verschiedene septorische und einen nonorischen Operator. Die Voigtsche Analysis vierter Ordnung in 36 Einheiten, die sich zu den Tensoren ebenso verhält wie die Tetraden zu den Affinoren, enthält zwei verschiedene skalare, einen vektorischen, drei verschiedene deviatorische, einen septorischen und

Einfache Größen:	Skalar	Vektor	Deviator	Septor	Nonor	Anzahl der Bestimmungszahlen:
Ordnung:	0	1	2	3	4	
Anzahl der Bestimmungszahlen:	1	3	5	7	9	
Vektor		1				3
Affinor, Dyade	1	1	1			9
Triade	1	3	2	1		27
Tetrade	3	6	6	3	1	81
usw.						⋮ 3^n
Vektor		1				3
Tensortripel	1		1			6
System von Trivektoren.		1		1		10
System von Bitensoren .	1		1		1	15
usw.						⋮ $\frac{n(n-1)}{2}$
Theorie der Kristallelastizität mit:						
15 Parametern	1		1		1	15
21 „	2		2		1	21
36 „	2	1	3	1	1	36
Algebra der reellen Zahlen	1					1
Vektoranalysis	1	1				4
Affinoranalysis	1	1	1			9
usw.						⋮ n^2

einen nonorischen Operator. Keine von diesen Analysen ist noch vollständig ausgearbeitet.

Bekanntlich treten in der Elastizitätslehre der Kristalle im kompliziertesten Falle 36 Parameter auf.[1]) Soll die Deformationsarbeit unabhängig sein von dem Wege, auf dem die Deformation zustande kommt, eine Annahme, die sich thermodynamisch begründen läßt, so gehen diese 36 Parameter auf 21 zurück. Eine Molekulartheorie der Elastizität, die nur Kräfte zwischen den Molekülen berücksichtigt, die ausschließlich Funktion der Entfernung sind, gelangt höchstens zu 15 Para-

1) Vgl. Voigt 00. 2, 01. 1; Abraham 01. 3.

metern. Letztere bestimmen einen Operator, dessen Bestimmungszahlen sich wie die 15 Produkte von vier Faktoren in a_1, a_2 und a_3 transformieren, und der demnach einen Skalar, einen Deviator und einen Nonor enthält. Voigt nannte einen solchen Operator ein System von Bitensoren. In der allgemeinen Theorie mit 21 Konstanten tritt hierzu noch ein Skalar und ein Deviator, während die 36 Konstanten zwei verschiedene Skalare, einen Vektor, drei verschiedene Deviatoren, einen Septor und einen Nonor bestimmen.

Die Tabelle auf nebenstehender Seite gestattet eine Übersicht.

Die Produkte von Größen beliebiger Ordnung. Es läßt sich leicht dartun, daß das allgemeinste Produkt zweier einfachen Größen n_1^{ter} und n_2^{ter} Ordnung, wo $n_1 > n_2$ ist, sich aus $2n_2 + 1$ einfachen Größen $(n_1 - n_2), \ldots, (n_1 + n_2)^{\text{ter}}$ Ordnung zusammenstellt. Diese Regel läßt sich z. B. an der Tabelle der Triaden, Tetraden usw. verifizieren. Da auch der Quotient eine (wenn auch einseitig) distributive Verknüpfung ist, gilt sie auch für den allgemeinsten Quotienten. Eine Größe, die mit einer Größe n_1^{ter} Ordnung multipliziert eine Größe n_2^{ter} Ordnung erzeugt, kann also nur $2p + 1$ Größen $(q - p), \ldots, (q + p)^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten, die bei dieser Multiplikation wirksam sind, wobei $p = n_1$, $q = n_2$ für $n_1 < n_2$ und $p = n_2$, $q = n_1$ für $n_1 > n_2$.

Drittes Kapitel.

Die Multiplikationsregeln der Affinoranalysis unabhängig vom Bezugssystem.

Die Bedeutung der Invarianz der Multiplikationen. Wir haben die Multiplikationsregeln der Affinoranalysis abgeleitet in bezug auf ein bestimmtes System von Grundeinheiten **1**, **i**, **L** und **I**. Die Grundmultiplikationen, Hauptmultiplikationen und abgeleiteten Multiplikationen sind aber invariant, das heißt der Wert der durch sie bestimmten Produkte ist unabhängig vom Bezugssystem. Dadurch wird uns die Möglichkeit gegeben, Gleichungen zwischen Produkten aufzustellen, in denen die Grundeinheiten nicht mehr auftreten, wir also mit beliebig gerichteten Größen in **1**, **i**, **L** und **I** selbst arbeiten, eine Möglichkeit, die gerade den besonderen Vorzug des Rechnens mit einer direkten Analysis wie Vektor- oder Affinoranalysis, gegenüber dem Rechnen in Koordinaten, bildet. Es könnte nun die Frage auftreten, ob es nicht wünschenswert wäre, schon bei der Ableitung der Multiplikationsregeln auf den Gebrauch irgend eines Koordinatensystems überhaupt zu verzichten, denn es ist klar, daß, da die Multiplikationen ja vom Bezugssystem unabhängig sind, auch sicher von einem solchen System freie Definitionen für dieselben vorhanden sein müssen. In der Tat ist von verschiedenen neueren Vektoranalytikern der Standpunkt vertreten, daß eine solche Art der Ableitung für die Vektoranalysis die einzig sachgemäße sei. Am weitesten in dieser Beziehung gehen Burali Forti und Marcolongo. Obwohl in ihren, der kritischen Untersuchung der Grundlagen der Vektoranalysis gewidmeten fünf Abhandlungen[1]) die Forderung der freien Ableitung des Systems nicht unter den in der ersten Abhandlung aufgestellten Grundsätzen aufgenommen ist, ist diese Forderung tatsächlich ihr wichtigster Grundsatz, auf den sie sich des weiteren immer wieder beziehen. Eine Analysis ist nach Burali Forti und Marcolongo nur dann „assoluto ed autonomo“ und nur dann wirklich existenzberechtigt, wenn alle ihre Symbole und Rechnungsweisen unabhängig von Koordinaten

1) 07. 3, 4, 5; 08. 2, 3; siehe auch 09. 1, 4, 10, 11, 14; 10. 3, 4, 5; 11. 1; 12. 3.

definiert sind. Ist ein Symbol in bezug auf ein Koordinatensystem gegeben, so nennen sie es eine Tachygraphie, und zwar eine essentielle Tachygraphie, wenn es einer anderen Definition unfähig ist, eine zufällige Tachygraphie aber, wenn in der Tat auch eine vom Bezugssystem freie Definition gefunden werden kann. Man könnte nun diesen Ausführungen beipflichten und dabei zugleich die schon zuviel mißbrauchten Worte „absolut“ und „autonom“ loswerden, wenn man als Kriterium das einzige, was sich streng mathematisch definieren läßt, einführte, nämlich die Invarianz bei Drehung des Bezugssystems. Dies tun aber Burali Forti und Marcolongo nicht. Symbole, die im strengsten Sinne invariant sind, erklären sie für essentielle Tachygraphien, bloß weil es ihnen nicht gelang, eine vom Bezugssystem freie Definition einzuführen. Damit wird aber das persönliche Element in einer Weise eingeführt, die nur heillose Verwirrung stiften kann.[1]) Um diese zu vermeiden, müssen wir die Invarianz als Kriterium nehmen. Da aber die Invarianz einer Funktion von der Weise, wie man sie definiert, unabhängig ist, verliert die Frage nach dem richtigen Weg zur Definition des Systems viel von ihrer Wichtigkeit, sie wird zu einer Frage der Methode, und ihre Beantwortung steht stark unter dem Einfluß der persönlichen Neigung.

Es mag sogar als wünschenswert erachtet werden, daß verschiedene Mathematiker die Frage verschieden beantworten, und daß die Analysis so einmal in ganz verschiedenen Richtungen durchgearbeitet wird, wenn nur ein lässiger Monopolstreit dabei ausgeschlossen bleibt. Von den neueren Vektoranalytikern hat hier v. Ignatowsky[2]) Wichtiges geleistet. Von dem Prinzip ausgehend, die Vektoranalysis samt der Dyadenrechnung ohne jegliches Bezugssystem abzuleiten, hat er dieses Prinzip mit anerkennenswerter Konsequenz durchgeführt, ohne dabei, wie Burali Forti und Marcolongo, schwerfällige Bezeichnungen (vgl. S. 25ff.) einzuführen. Obwohl es nun sehr wichtig ist, daß es in der Tat ein Buch gibt, wo dieser Weg der freien Ableitung einmal konsequent begangen ist, und der Affinoranalysis sowie den höheren Analysen hoffentlich auch einmal ein solches Buch gewidmet sein mag, erscheint es uns doch, da wo es gilt andere in eine Analysis einzuführen, und insbesondere hier, wo dies zum ersten Male zu geschehen hat, richtiger, den immerhin leichteren

1) Ein schlagendes Beispiel einer solchen Verwirrung bietet das Zeichen ∇, das Buralo Forti und Marcolongo verschiedentlich für absolute Tachygraphie erklärt haben, 07. 5 S. 329; 08. 2 S. 374; 09. 11 S. 465; 11. 1 S. 144, dessen vom Bezugssystem freie Definition aber schon von Jung 1908, 08. 5, gegeben und seitdem z. B. von Ignatowsky, 09. 13, grundsätzlich verwendet wurde.

2) 09. 13.

Weg zu wählen, der von den in Koordinaten zerlegten Formeln zu den freien führt, also von dem Bekannten zum vorläufig Neuen und Unbekannten.

Die affinorische und dyadische Multiplikation und ihre Abgeleiteten. Wir haben also zunächst die Rechnungsregeln der Affinoranalysis in bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem abgeleitet und treten erst jetzt an die Aufgabe heran, diese Regeln von dem Bezugssystem frei zu machen. Dabei wollen wir aber noch eine Vereinfachung der Notation vornehmen. Es stellt sich nämlich heraus, daß, wenn wir die Multiplikationen $\urcorner$ und $\llcorner$ mit ihren Umkehrungen und abgeleiteten Multiplikationen auf alle vorkommenden Größen anwenden, die Formeln stark überlastet werden mit den Konstanten α und β. Wir können aber fast alle diese Konstanten mit einem Male los werden, indem wir für die Multiplikation von Vektoren unter sich $\urcorner$ und $\llcorner$ beibehalten, für die anderen möglichen Verknüpfungen aber Vielfache von $\urcorner$ und $\llcorner$ einführen, deren Verhältniszahlen sich folgender Tabelle entnehmen lassen:

(143)

	S	V	A
S	$\frac{\beta^2}{\alpha^2}$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\beta^2}{\alpha}$
V	$\frac{\beta}{\alpha}$	1	β
A	$\frac{\beta^2}{\alpha}$	β	β^2 [1]

Deviatoren und Tensoren betrachten wir als unvollständige Affinoren. Bezieht man sich statt auf $\urcorner$ und $\llcorner$ auf $\beta^2\urcorner$ und $\beta^2\llcorner$, die Multiplikationen für Affinoren unter sich, so erhält die Tabelle die Form:

(144)

	S	V	A
S	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha\beta}$	$\frac{1}{\alpha}$
V	$\frac{1}{\alpha\beta}$	$\frac{1}{\beta^2}$	$\frac{1}{\beta}$
A	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\beta}$	1

die das Gesetz ihrer Bildung deutlicher hervortreten läßt.

1) In dieser Tabelle sind besonders die Verknüpfungen von Vektoren mit Vektoren vermittels $\urcorner$, $\llcorner$, die von Vektoren mit Affinoren vermittels $\beta\urcorner$, $\beta\llcorner$, und die von Affinoren mit Affinoren vermittels $\beta^2\urcorner$, $\beta^2\llcorner$ wichtig, und es ist zu empfehlen, sich diese genau einzuprägen. Die anderen sind weniger wichtig, da Skalare meist nur vermittels der skalaren Multiplikation verknüpft werden.

Wir müssen also außer $\neg$ und $\llcorner$ noch fünf andere Sätze von Hauptmultiplikationen einführen, die sich nur um einen Faktor von $\neg$ und $\llcorner$ unterscheiden. Zu jeder Grundmultiplikation gesellen sich ihre abgeleiteten Multiplikationen. Dies kann man ohne weiteres durch Bildung von zehn neuen Grundzeichen erzielen, die sich etwa in folgender Weise wählen ließen. Für die Hauptmultiplikationen von Affinoren unter sich führe man die Zeichen $\rceil$ und $\lfloor$ ein, und gebe nun einen unteren bzw. oberen Index, der die Zahl angibt, durch welche die Multiplikationen dividiert werden müssen. So erhält man für die Multiplikation von:

Skalar mit Skalar	$\rceil_{\alpha\alpha}$	und	$\lfloor^{\alpha\alpha}$	.
„ „ Vektor	$\rceil_{\alpha\beta}$	„	$\lfloor^{\alpha\beta}$	.
„ „ Affinor	$\rceil_{\alpha}$	„	$\lfloor^{\alpha}$	
Vektor „ Vektor	$\rceil_{\beta\beta}$	„	$\lfloor^{\beta\beta}$	.
Vektor „ Affinor	$\rceil_{\beta}$	„	$\lfloor^{\beta}$	.
Affinor „ Affinor	$\rceil$	„	$\lfloor$	.

Nun sind aber Skalare, Vektoren und Affinoren stets durch ihre Schriftart deutlich voneinander unterschieden. Wir können daher die Indizes, die ja nichts anderes angeben als die doch schon deutlich in den Formeln hervortretende Orientierungsart der Faktoren, ohne weiteres fortlassen, wodurch eine bedeutende Vereinfachung erzielt wird. Die Zeichen $\rceil$ und $\lfloor$ sind dann aber abgekürzte geworden und haben je nach dem Ort ihrer Anwendung eine andere Bedeutung.

Für die Multiplikation von Vektoren unter sich ist

$$(145)\qquad \begin{cases} \rceil = \neg = 2\alpha\,\cdot + \beta\times - \mathsf{X} \\ \lfloor = \llcorner = \alpha\,\cdot + \beta\times + \mathsf{X} \\ \lceil\cdot\rceil = \ulcorner\!\urcorner \end{cases}$$

usw.,

für die Multiplikation von Vektoren mit Affinoren:

$$(146)\qquad \begin{cases} \rceil = \beta\neg = 2\alpha\beta\,\cdot + \beta^2\times - \beta\,\mathsf{X} \\ \lfloor = \beta\llcorner = \alpha\beta\,\cdot + \beta^2\times + \beta\,\mathsf{X} \\ \lceil\cdot\rceil = \beta\ulcorner\!\urcorner \end{cases}$$

usw.,

und für die Multiplikation von Affinoren unter sich:

$$(147)\quad \begin{cases} \urcorner = \beta^2 \neg - 2\alpha\beta^2 \cdot + \beta^2 \times - \beta^2\, \mathsf{X} \\ \llcorner = \beta^2 \lfloor - \alpha\beta^2 \cdot + \beta^2 \times + \beta^2\, \mathsf{X} \\ \lceil\cdot\rceil = \beta^2 \lfloor\cdot\rfloor \end{cases}$$

usw.

Für die drei Verknüpfungsweisen ohne Skalare gilt also, daß die Hauptmultiplikationen $\urcorner$ und $\llcorner$ sich aus den Multiplikationen

$$\neg = 2\alpha \cdot + \beta \times - \mathsf{X}$$
$$\lfloor = \alpha \cdot + \beta \times + \mathsf{X}$$

durch Multiplikation mit β^2 und Division durch die zu den Ordnungen der Faktoren gehörigen Konstanten ableiten.

Für die Multiplikation von Skalaren unter sich ist:

$$(148)\quad \begin{cases} \urcorner = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \neg = \frac{1}{\alpha} \cdot \qquad & \llcorner = \frac{1}{2\alpha} \cdot \\ \lceil\cdot\rceil = 3 \cdot & \lfloor\cdot\rfloor = \frac{3}{2} \cdot , \end{cases}$$

für die Multiplikation von Skalaren mit Vektoren ist:

$$(149)\quad \begin{cases} \urcorner = \frac{\beta}{\alpha} \neg = \frac{1}{\beta} \cdot \qquad & \llcorner = \frac{1}{2\beta} \\ \overline{\times}\rceil = 2 \cdot & \lfloor\underline{\times} = \cdot , \end{cases}$$

und für die Multiplikation von Skalaren mit Affinoren ist:

$$(150)\quad \urcorner = \frac{\beta^2}{\alpha} \neg = \cdot \qquad \llcorner = \frac{1}{2} \cdot .$$

Für die drei Verknüpfungsweisen eines Skalars mit einer anderen Größe gilt also, daß $\urcorner$ gleich der skalaren Multiplikation ist, dividiert durch die zu der Ordnung dieser Größe gehörende Konstante; die Multiplikation $\llcorner$ ist unter diesen Umständen die Hälfte von $\urcorner$.

Eines ist noch zu beachten. Bei Anwendung des distributiven Gesetzes zur Zerlegung eines Produktes in $\urcorner$ oder $\llcorner$ von zwei Faktoren, von denen wenigstens einer ein Affinor ist, ist dem Umstande Rechnung zu tragen, daß $\urcorner$ und $\llcorner$ verkürzte Zeichen sind, die je nach der Orientierungsart der Faktoren verschiedene Bedeutung haben. Es ist also, wenn

$$\mathbf{A} = \alpha A_s + \beta \mathbf{A}_v + \mathbf{A}_d$$
$$\mathbf{B} = \alpha B_s + \beta \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_d$$

ist, z. B.:

$$\mathbf{A} \urcorner \mathbf{b} = (\alpha A_s + \beta \mathbf{A}_v + \mathbf{A}_d) \urcorner \mathbf{b} = \alpha A_s \urcorner \mathbf{b} + \beta \mathbf{A}_v \urcorner \mathbf{b} + \mathbf{A}_d \urcorner \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \urcorner \mathbf{B} = (\alpha A_s + \beta \mathbf{A}_v + \mathbf{A}_d) \urcorner (\alpha B_s + \beta \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_d) &= \alpha^2 A_s \urcorner B_s \\ &+ \alpha\beta A_s \urcorner \mathbf{B}_v + \alpha A_s \urcorner \mathbf{B}_d + \alpha\beta \mathbf{A}_v \urcorner B_s \\ &+ \beta^2 \mathbf{A}_v \urcorner \mathbf{B}_v + \beta \mathbf{A}_v \urcorner \mathbf{B}_d + \alpha \mathbf{A}_d \urcorner B_s \\ &+ \beta \mathbf{A}_d \urcorner \mathbf{B}_v + \mathbf{A}_d \urcorner \mathbf{B}_d , \end{aligned}$$

und die richtige Zerlegung lautet:

$$\mathbf{A} \urcorner \mathbf{b} = \alpha^2 A_s \urcorner \mathbf{b} + \beta^2 \mathbf{A}_v \urcorner \mathbf{b} + \mathbf{A}_d \urcorner \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B} = {} & \alpha^4 A_s \urcorner B_s + \alpha^2\beta^2 A_s \urcorner \mathbf{B}_v + \alpha^2 A_s \urcorner \mathbf{B}_d \\ & + \alpha^2\beta^2 \mathbf{A}_v \urcorner B_s + \beta^4 \mathbf{A}_v \urcorner \mathbf{B}_v + \beta^2 \mathbf{A}_v \urcorner \mathbf{B}_d \\ & + \alpha^2 \mathbf{A}_d \urcorner B_s + \beta^2 \mathbf{A}_d \urcorner \mathbf{B}_v + \mathbf{A}_d \urcorner \mathbf{B}_d .\end{aligned}$$

Wir können das hierbei zu verfolgende Verfahren in folgender Regel aussprechen:

> **Regel:** Bei Zerlegung eines Produktes in einer der Hauptmultiplikationen $\urcorner$ und $\llcorner$ nach dem distributiven Gesetz ist jedem Teilprodukt für einen in ihm enthaltenen, aus der Zerlegung eines Affinors hervorgehenden Skalar ein Koeffizient α und für einen ebensolchen Vektor ein Koeffizient β beizufügen.

Die Multiplikationen $\urcorner$, $\llcorner$, ihre Umgekehrten und Abgeleiteten mögen folgende Namen erhalten:

$\urcorner$	affinorische	Multiplikation
$\ulcorner$	umgekehrt affinorische	„
$\llcorner$	dyadische	„
$\lrcorner$	umgekehrt dyadische	„
$\lceil\cdot\rceil$	skalaraffinorische	„
$\overline{\times}\rceil$	vektoraffinorische	„
$\overline{X}\rceil$	deviatoraffinorische	„
$\top$	tensoraffinorische	„
$\overset{k}{\urcorner}$	konjugiertaffinorische	„
$\overset{c}{\urcorner}$	überaffinorische	„
$\overset{2}{\urcorner}$	unteraffinorische	„
$\lfloor\cdot\rfloor$	skalardyadische	„
$\lfloor\underline{\times}$	vektordyadische	„
$\lfloor\underline{X}$	deviatordyadische	„
$\perp$	tensordyadische oder tensorische	„
$\underset{k}{\llcorner}$	konjugiertdyadische	„
$\underset{c}{\llcorner}$	überdyadische	„
$\underset{5}{\llcorner}$	unterdyadische	„
$\lceil\times$	umgekehrt vektoraffinorische	„

usw.

Bei den vielen möglichen Multiplikationszeichen ist es von Vorteil, einige derselben zu unterdrücken. Da an der Schreibart zu sehen ist, ob

eine Größe ein Skalar, Vektor oder Affinor ist, kann man übereinkommen, daß für jede mögliche Kombination das Zeichen einer bestimmt angegebenen Multiplikation fortgelassen werden darf, ohne daß dadurch Zweideutigkeit entstehen kann. Wir wollen dazu folgende Auswahl treffen.[1]) Bei Multiplikation eines Skalars mit einer beliebigen Größe dürfen wir das Zeichen $\cdot$ der skalaren Multiplikation unterdrücken:

$$(151) \qquad \begin{cases} ab = a \cdot b \\ a\mathfrak{b} = a \cdot \mathfrak{b} \\ a\mathbf{B} = a \cdot \mathbf{B}. \end{cases}$$

Bei Multiplikationen von Vektoren unter sich wählen wir das Zeichen $\llcorner$ der dyadischen Multiplikation:

$$(152) \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \llcorner \mathfrak{b}.$$

Bei Multiplikationen von Vektoren mit Deviatoren, Tensoren oder Affinoren wählen wir das Zeichen $\llcorner\!\times$ der vektordyadischen Multiplikation:

$$(153) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}\mathbf{B} = \mathfrak{a} \llcorner\!\times \mathbf{B} \\ \mathbf{A}\mathfrak{b} = \mathbf{A} \llcorner\!\times \mathfrak{b}. \end{cases}$$

Bei Multiplikation von Deviatoren, Tensoren und Affinoren unter sich wählen wir das Zeichen $\urcorner$ der affinorischen Multiplikation:

$$(154) \qquad \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A} \urcorner \mathbf{B}.$$

Bei dieser Auswahl ist darauf geachtet, daß die am meisten vorkommenden Multiplikationszeichen fortgelassen werden dürfen, und die Bezeichnungen sich auch so viel wie möglich den bestehenden Analysen anschließen.

Die unterdrückten Zeichen dürfen natürlich jederzeit wieder eingesetzt werden, wenn dies für irgendeinen Zweck dienlich ist. Undeutlichkeit kann dadurch ja nicht entstehen. Bei Angabe eines einzelnen Operators werde das Multiplikationszeichen niemals unterdrückt, sodaß ein Buchstabe ohne begleitendes Zeichen stets eine Größe darstellt. Verwechslung von Größen und Operatoren ist dadurch ausgeschlossen (vgl. S. 116).

Wir wenden uns jetzt zur Ableitung der freien Multiplikationsregeln.

Die Produkte von zwei Vektoren. Zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die einen Winkel φ einschließen, können in folgender Weise multiplikativ verknüpft werden:

$$(155) \qquad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \tfrac{1}{2} S\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b} = \tfrac{1}{2} S\mathfrak{a} \ulcorner \mathfrak{b} = S\mathfrak{a}\mathfrak{b} = S\mathfrak{a} \lrcorner \mathfrak{b} \quad \text{skal. Prod. (kommut.).}$$

1) Diese Auswahl ist als ein Vorschlag für den allgemeinen Gebrauch des Systems zu betrachten. Da jede Multiplikation ihr eigenes Zeichen hat und behält, kann für jede spezielle Untersuchung auch eine andere Wahl getroffen werden, wenn dieselbe zu Anfang nur genau angegeben wird.

Das skalare Produkt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist die Zahl $-a_m b_m \cos\varphi$.

(156) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = V\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b} = -V\mathfrak{a} \ulcorner \mathfrak{b} = V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -V\mathfrak{a} \lrcorner \mathfrak{b}$ vektorisches Produkt (anticomm.).

Das vektorische Produkt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist ein Vektor, senkrecht auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, seine Richtung ist der Drehrichtung von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ vermittels einer Rechtsschraube zugeordnet, sein Betrag ist $a_m b_m \sin\alpha$.

(157) $\mathfrak{a} \mathbin{\times\!\!\!\cdot} \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ quaternionisches Produkt (assoz.).

(158) $\mathfrak{a} \mathbin{X} \mathfrak{b} = -D\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b} = -D\mathfrak{a} \ulcorner \mathfrak{b} = D\mathfrak{a}\mathfrak{b} = D\mathfrak{a} \lrcorner \mathfrak{b}$ deviatorisches Produkt (kommut.).

Das deviatorische Produkt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist ein Deviator, der $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu bestimmenden Vektoren hat (vgl. S. 82). Seine Richtungsfläche ist ein einschaliges Hyperboloid, auf dessen kreisförmigen Durchschnitten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ senkrecht stehen. Sein Betrag ist

$$a_m b_m \sqrt{(\tfrac{1}{6}\cos^2\varphi + \tfrac{1}{2})}\,.$$

Jeder beliebige Deviator kann als deviatorisches Produkt zweier Vektoren geschrieben werden (vgl. S. 82).

(159) $\begin{cases} \mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b} = 2\alpha\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + \beta\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} - \mathfrak{a} \mathbin{X} \mathfrak{b} & \text{affinor. Prod.} \\ \mathfrak{a} \ulcorner \mathfrak{b} = 2\alpha\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} - \beta\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} - \mathfrak{a} \mathbin{X} \mathfrak{b} & \text{umgek. aff. Prod.} \end{cases}$ (assoz.)

(160) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \alpha\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + \beta\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} + \mathfrak{a} \mathbin{X} \mathfrak{b}$ dyadisches Prod.

(161) a) $\mathfrak{a} \lrcorner \mathfrak{b} = \alpha\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} - \beta\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} + \mathfrak{a} \mathbin{X} \mathfrak{b}$ umgek. dyad. Prod.
b) $\mathfrak{a} \lrcorner \mathfrak{b} = -\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b} + 3\alpha\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$

(162) $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{a}) - \alpha\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + \beta\mathfrak{a} \mathbin{X} \mathfrak{b}$ tensorisches Produkt (kommut.).

Die Zahl $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ steht in einem von dem Winkel φ abhängigen Verhältnis zum Absolutwert von $\mathfrak{a} \mathbin{X} \mathfrak{b}$. Da dies bei einem beliebigen Tensor nicht der Fall zu sein braucht, kann ein Tensor im allgemeinen nicht als tensorisches Produkt zweier Vektoren dargestellt werden. In derselben Weise ist es nicht möglich, einen beliebigen Affinor als dyadisches Produkt zweier Vektoren darzustellen. Da aber jeder Affinor in den neun dyadischen Produkten $\mathfrak{i}_j\mathfrak{i}_k$, $j, k = 1, 2, 3$ ausgedrückt werden kann, ist es auf eine und nur auf eine Weise möglich, ihn in die Form

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\mathfrak{d} + \mathfrak{e}\mathfrak{f}$$

zu bringen, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{e}$ beliebige, aber vorher fest gewählte nicht komplanare Vektoren sind. Denn jeder vordere Vektor der neun Produkte $\mathfrak{i}_j\,\mathfrak{i}_k$ kann als Vielfachsumme von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{e}$ geschrieben werden, und die neun

Produkte sind daher in drei Produkte zusammenzufassen. In derselben Weise ist es möglich, vorher die hinteren Faktoren beliebig aber nicht komplanar zu wählen, der Affinor ist dann durch die drei vorderen bestimmt. Für affinorische Produkte gilt dasselbe, der Beweis verläuft ähnlich unter Hinzuziehung der neun affinorischen Produkte

$$\mathbf{i}_j \urcorner \mathbf{i}_k \qquad j,k = 1,2,3.$$

Die Produkte von drei Vektoren. Es gibt zwei Assoziationen, $(\cdot\,\cdot)\,\cdot$ und $\cdot\,(\cdot\,\cdot)$. Die Produkte in der Assoziation $(\cdot\,\cdot)\,\cdot$ sind sämtlich zurückzuführen auf die sechs Produkte:

$$(\mathbf{a} \bar{\times} \mathbf{b}) \,\bar{\cdot}\, \mathbf{c} \qquad \text{Skalar}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbf{a} \,\bar{\cdot}\, \mathbf{b}) \,\bar{\cdot}\, \mathbf{c}\\ (\mathbf{a} \bar{\times} \mathbf{b}) \bar{\times} \mathbf{c}\\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}\end{array}\right\} \;\ldots\ldots\; \text{Vektoren}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbf{a} \bar{\times} \mathbf{b}) \times \mathbf{c}\\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bar{\times} \mathbf{c}\end{array}\right\} \;\ldots\ldots\; \text{Deviatoren.}$$

Andere Kombinationen der Grundmultiplikationen ergeben in dieser Assoziation Null. Die Werte dieser Produkte in Einheiten sind folgender Tabelle zu entnehmen, in der gleichzeitig rechts die Koeffizienten angegeben sind, mit denen diese Werte in die Produkte:

$$\begin{array}{r}(\mathbf{a} \urcorner \mathbf{b}) \urcorner \mathbf{c}\\ (\mathbf{a} \urcorner \mathbf{b}) \llcorner \mathbf{c}\\ (\mathbf{a}\mathbf{b}) \urcorner \mathbf{c}\\ (\mathbf{a}\mathbf{b}) \llcorner \mathbf{c}\end{array}$$

eingehen. Es ist zu beachten, daß z. B.

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) \llcorner \mathbf{c} = \beta(\mathbf{a} \llcorner \mathbf{b}) \llcorner \mathbf{c}$$

ist, da die zweite Multiplikation einen Affinor mit einem Vektor verknüpft.

(163) $(\cdot\ \ \cdot)\,\cdot$	$\urcorner\urcorner$	$\urcorner\llcorner$	$\llcorner\urcorner$	$\llcorner\llcorner$
Skalar:				
$(\mathbf{a} \bar{\times} \mathbf{b}) \,\bar{\cdot}\, \mathbf{c} = \alpha\beta(-a_2 b_3 c_1 + a_3 b_2 c_1 + \text{cycl.})$	2β	β	2β	β
Vektoren:				
$(\mathbf{a} \,\bar{\cdot}\, \mathbf{b}) \,\bar{\cdot}\, \mathbf{c} = -\frac{1}{3}(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_1 + a_3 b_3 c_1)\mathbf{i}_1 + \text{cycl.}$	4β	2β	2β	β
$(\mathbf{a} \bar{\times} \mathbf{b}) \bar{\times} \mathbf{c} = +\frac{1}{2}(a_3 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_3 - a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_2)\mathbf{i}_1 + \text{cycl.}$	β	β	β	β
$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\frac{1}{2}(a_3 b_1 c_3 + a_1 b_3 c_3 + a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_2)\mathbf{i}_1 + \text{cycl.}$ $-\frac{1}{3}(2a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_3 c_1)\mathbf{i}_1 + \text{cycl.}$	β	$-\beta$	$-\beta$	β

(163) $(\cdot\ \ \cdot)\cdot$	$\urcorner\urcorner$	$\urcorner\llcorner$	$\llcorner\urcorner$	$\llcorner\llcorner$
Deviatoren:				
$(\mathbf{a}\,\bar{\times}\,\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \frac{1}{2}(a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 + a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)\mathbf{I}_1 + \text{cycl.}$ $+\alpha\beta(a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1)\mathbf{L}_1 + \text{cycl.}$	$\beta-$	β	$-\beta$	β
$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\bar{\times}\,\mathbf{c} = (-a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)\mathbf{I}_1 + \text{cycl.}$ $+\frac{1}{2}(-a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 + a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2)\mathbf{I}_1$ $+\alpha\beta(a_1b_2c_3 + a_2b_1c_3 - a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2)\mathbf{L}_1 + \text{cycl.}$	$\beta-$	$-\beta$	β	β

Aus dieser Tabelle ergeben sich nachfolgende Werte für die Produkte $(a \urcorner b) \urcorner c$ usw.:

(164)	$(\mathbf{a}\urcorner\mathbf{b})\urcorner\mathbf{c}$	$(\mathbf{a}\urcorner\mathbf{b})\llcorner\mathbf{c}$	$(\mathbf{a}\mathbf{b})\urcorner\mathbf{c}$	$(\mathbf{a}\mathbf{b})\llcorner\mathbf{c}$
Skalarteil:	$\alpha\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$	$\frac{1}{2}\alpha\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$	$\alpha\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$	$\frac{1}{2}\alpha\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$
Vektorteil:	$\beta\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\beta(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$	$\beta\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$	$\beta\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$	$\beta\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$
Deviatorteil:	$-\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$	$-\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$	$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$	$\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$
Total:	Assoziativ	Ɔ$\mathbf{a}\lrcorner(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$	$\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$	

In derselben Weise erhalten wir für die Assoziation $.(\,.\,.)$ die Tabellen:

(165) $\cdot(\cdot\ \ \cdot)$	$\urcorner\urcorner$	$\llcorner\urcorner$	$\urcorner\llcorner$	$\llcorner\llcorner$
Skalar:				
$\mathbf{a}\,\dot{-}\,(\mathbf{b}\,\bar{\times}\,\mathbf{c}) = \alpha\beta(-a_1b_2c_3 + a_1b_3c_2 + \text{cycl.})$	2β	β	2β	β
Vektoren:				
$\mathbf{a}\,\dot{-}\,(\mathbf{b}\,\dot{-}\,\mathbf{c}) = -\frac{1}{3}(a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 + a_1b_3c_3)\mathbf{i}_1 + \text{cycl.}$	4β	2β	2β	β
$\mathbf{a}\,\bar{\times}\,(\mathbf{b}\,\bar{\times}\,\mathbf{c}) = +\frac{1}{2}(a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1 - a_2b_2c_1 + a_2b_1c_2)\mathbf{i}_1 + \text{cycl.}$	β	β	β	β
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -\frac{1}{2}(a_3b_1c_3 + a_3b_3c_1 + a_2b_2c_1 + a_2b_1c_2)\mathbf{i}_1 + \text{cycl.}$ $-\frac{1}{3}(2a_1b_1c_1 - a_1b_2c_2 - a_1b_3c_3)\mathbf{i}_1 + \text{cycl.}$	β	$-\beta$	$-\beta$	β
Deviatoren:				
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\,\bar{\times}\,\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(-a_3b_1c_3 + a_3b_3c_1 - a_2b_2c_1 + a_2b_1c_2)\mathbf{I}_1 + \text{cycl.}$ $+\alpha\beta(-a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3)\mathbf{L}_1 + \text{cycl.}$	$-\beta$	β	$-\beta$	β
$\mathbf{a}\,\bar{\times}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (a_1b_2c_2 - a_1b_3c_3)\mathbf{I}_1 + \text{cycl.}$ $+\frac{1}{2}(a_3b_1c_3 + a_3b_3c_1 - a_2b_2c_1 - a_2b_1c_2)\mathbf{I}_1 + \text{cycl.}$ $+\alpha\beta(-a_3b_2c_1 - a_3b_1c_2 + a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1)\mathbf{L}_1 + \text{cycl.}$	$-\beta$	$-\beta$	β	β

und:

(166)

	$\mathfrak{a} \urcorner (\mathfrak{b} \urcorner \mathfrak{c})$	$\mathfrak{a} \llcorner (\mathfrak{b} \urcorner \mathfrak{c})$	$\mathfrak{a} \urcorner (\mathfrak{b}\mathfrak{c})$	$\mathfrak{a} \llcorner (\mathfrak{b}\mathfrak{c})$
Skalarteil:	$\alpha(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$	$\frac{1}{2}\alpha(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$	$\alpha(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$	$\frac{1}{2}\alpha(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$
Vektorteil:	$\beta(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c} + \beta\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$	$\beta(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$	$\beta(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$	$\beta(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c}$
Deviatorteil:	$-(\mathfrak{a} \times \mathfrak{c}) \mathsf{X}\, \mathfrak{b}$	$-(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \mathsf{X}\, \mathfrak{c}$	$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \mathsf{X}\, \mathfrak{c}$	$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{c}) \mathsf{X}\, \mathfrak{b}$
Total:	Assoziativ	$\text{Ɔ}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \lrcorner\, \mathfrak{c}$	$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c}$	

Als Hauptgleichungen ergeben sich aus den Tabellen (164) und (166):

$$(167)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \urcorner \mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \\ \mathfrak{a} \urcorner (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c} \end{cases}$$

$$(168)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b}) \llcorner \mathfrak{c} = \text{Ɔ}\mathfrak{a} \lrcorner (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \\ \mathfrak{a} \llcorner (\mathfrak{b} \urcorner \mathfrak{c}) = \text{Ɔ}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \lrcorner \mathfrak{c}, \end{cases}$$

die eine Assoziationsänderung der Produkte in den Hauptmultiplikationen gestatten, und aus welchen für den Fall $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ folgt:

$$(169)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \urcorner \mathfrak{b} = 0 \\ \mathfrak{a} \urcorner (\mathfrak{a}\mathfrak{c}) = 0 \end{cases}$$

$$(170)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b}) \llcorner \mathfrak{b} = 0 \\ \mathfrak{a} \llcorner (\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{c}) = 0. \end{cases}$$

Dieses Resultat läßt sich in der Regel aussprechen:

Regel: Wenn ein Produkt dreier Vektoren zwei Hauptmultiplikationen oder eine Hauptmultiplikation innerhalb und eine abgeleitete außerhalb der Klammer enthält, deren Zeichen sich zu einem Quadrat ergänzen, so ist das Produkt Null, wenn die zwei benachbarten Vektoren, von denen der eine nicht in den Klammern steht, gleichgerichtet sind.

Die Betrachtung der Skalarteile in den Tabellen (164) und (166) ergibt:

$$(171)\qquad \begin{cases} \text{a)} \begin{cases} (\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b}) \dot{\sqcap}\, \mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \dot{\sqcap}\, \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \\ \mathfrak{a} \dot{\sqcap} (\mathfrak{b} \urcorner \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \dot{\sqcap} (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} (\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b}) \dot{\sqcup}\, \mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \dot{\sqcup}\, \mathfrak{c} = \frac{1}{2}\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \\ \mathfrak{a} \dot{\sqcup} (\mathfrak{b} \urcorner \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \dot{\sqcup} (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}. \end{cases} \end{cases}$$

Die Produkte dieser Art bestehen, wie aus den Tabellen (163) und (165) hervorgeht, nur aus einem Teil, in welchem $\times$ innerhalb und $\cdot$ außerhalb der Klammern vorkommt. Es ist also offenbar z. B.:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \dot{\sqcup}\, \mathfrak{c} = -(\mathfrak{a} \lrcorner \mathfrak{b}) \dot{\sqcup}\, \mathfrak{c} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \dot{\sqcap}\, \mathfrak{c} = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a} \ulcorner \mathfrak{b}) \dot{\sqcap}\, \mathfrak{c}$$

und da, wie aus (163) und (165) folgt,

$$(172)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a} = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = \mathfrak{c} \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a})\end{cases}$$

ist, können wir die Regel aussprechen:

Regel: In einem Produkt von drei Vektoren, das eine Hauptmultiplikation innerhalb und eine skalar abgeleitete außerhalb der Klammern enthält, ist Umkehren des inneren Zeichens mit Vorzeichenwechsel gestattet. Umklappen des äußeren Zeichens nach oben verdoppelt das Produkt und Umklappen des inneren bedingt Vorzeichenwechsel. Zyklischer Faktorenwechsel läßt das Produkt ungeändert.

Die Betrachtung der Vektorteile in den Tabellen (164) und (166) ergibt:

$$(173)\qquad \begin{cases} \text{a)} \begin{cases}(\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b})\ \overline{\times}\!\urcorner\ \mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c} \\ \mathfrak{a}\ \overline{\times}\!\urcorner\ (\mathfrak{b} \urcorner \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c} + \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})\end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases}(\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b})\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\ \overline{\times}\!\urcorner\ \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \urcorner \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\ \overline{\times}\!\urcorner\ (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}\end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) \\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c}.\end{cases}\end{cases}$$

Diese Produkte setzen sich, wie aus den Tabellen (163) und (165) ersichtlich, nur aus Teilen zusammen, die zwei gleiche Grundmultiplikationen enthalten, und es gilt daher offenbar z. B.:

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\ \overline{\times}\!\urcorner\ \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \lrcorner \mathfrak{b})\ \ulcorner\!\overline{\times}\ \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \ulcorner \mathfrak{b})\ \underline{\times}\!\lrcorner\ \mathfrak{c} \\ &(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} \neq (\mathfrak{a} \ulcorner \mathfrak{b})\ \ulcorner\!\overline{\times}\ \mathfrak{c},\end{aligned}$$

oder allgemein:

Regel: In einem Produkt von drei Vektoren, das eine Hauptmultiplikation innerhalb und eine vektorisch abgeleitete Multiplikation außerhalb der Klammern enthält, ist gleichzeitiges Umkehren der Zeichen gestattet, gleichzeitiges Umklappen aber nur sofern das eine Zeichen den Horizontalstrich oben, das andere diesen Strich unten hat.

Aus (173 c) leiten wir durch Zerlegung ab:

$$(174)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \frac{1}{3}\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) + \frac{1}{2}\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) + \mathfrak{a} \mathbin{X} (\mathfrak{b} \mathbin{X} \mathfrak{c}) \\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = \frac{1}{3}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c} + \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} \mathbin{X} \mathfrak{b}) \mathbin{X} \mathfrak{c},\end{cases}$$

Formeln, die wir neben die aus (163) und (165), sowie bei Anwendung des assoziativen Gesetzes für $\times$, hervorgehenden:

$$(175)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) \mp \mathfrak{b}\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{c})\\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} \mp (\mathfrak{a}\times\mathfrak{c})\times\mathfrak{b}\end{cases}$$

stellen wollen.[1] $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ sind die Quadrate der Ordnungskonstanten α und β. In derselben Weise ergibt sich aus (173 b):

$$(176)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} = \frac{2}{3}\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) + \frac{1}{2}\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) - \mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c})\\ \mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = \frac{2}{3}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} + \frac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}),\end{cases}$$

eine Formel, die auch durch Anwendung von (175) auf (174) erhalten werden kann, und die wir neben die in anderer Form geschriebenen Gleichungen (175):

$$(175)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} = \mp(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\mathfrak{a} \pm (\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})\mathfrak{b}\\ \mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = \mp\,\mathfrak{c}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) \pm \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})\end{cases}$$

stellen wollen. Bei Auflösung von (174) oder (176) nach $(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c})$ ergibt sich unter Anwendung von (175):

$$(177)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) + \frac{1}{2}\mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) - \frac{1}{3}\mathfrak{c}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\\ \mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} + \frac{1}{2}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})\mathfrak{b} - \frac{1}{3}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\mathfrak{a}\end{cases}$$

$$(178)\qquad \begin{aligned}(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}) &= \tfrac{5}{6}\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) - \tfrac{5}{6}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}\\ &= \tfrac{5}{6}\mathfrak{b}\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})\end{aligned}$$

$$(179)\qquad \begin{cases}\frac{5}{6}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} = -(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{a} + (\mathfrak{c}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{a})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b}\\ \frac{5}{6}\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = -\mathfrak{c}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b}) + \mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{c}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{a}).\end{cases}$$

Aus (175) ist abzuleiten:

$$(180)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} + (\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\times\mathfrak{a} + (\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})\times\mathfrak{b} = 0\\ \mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) + \mathfrak{c}\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) + \mathfrak{b}\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}) = 0,\end{cases}$$

es ist aber zu beachten, daß

$$(181)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c} + (\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{a} + (\mathfrak{c}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{a})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b} \neq 0\\ \mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}) + \mathfrak{c}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b}) + \mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{c}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{a}) \neq 0\end{cases}$$

ist. Da nach (173c):

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} &= \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) &= (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c}\end{aligned}$$

---

1) Die schon aus der Vektoranalysis bekannten Formeln sind grundsätzlich so geschrieben, wie sie sich aus $\mathfrak{i}_1\cdot\mathfrak{i}_1 = -1$ herleiten. Um dem mit der herkömmlichen Vektoranalysis Vertrauten das Studium zu erleichtern, sind aber in diesem Kapitel die gebräuchlichen Vorzeichen, die aus der Annahme $\mathfrak{i}_1\cdot\mathfrak{i}_1 = +1$ hervorgehen, klein mit angegeben.

und $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ sich nach (174) zusammensetzt aus $\frac{1}{3}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c}$ bzw. $\frac{1}{3}\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})$, $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$ bzw. $\frac{1}{2}\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c})$, von welchen Teilen die beiden ersten Assoziationsänderung gestatten:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} &= \tfrac{1}{9}\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) + \tfrac{1}{6}\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) + \tfrac{1}{3}\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}) = \tfrac{1}{3}\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})\\
\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} &= \tfrac{1}{3}\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) + \tfrac{1}{4}\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\urcorner\mathfrak{c})\\
(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c} &= \tfrac{5}{9}\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) - \tfrac{5}{12}\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) + \tfrac{1}{6}\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c})\\
\hline
(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} &= \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) &= \tfrac{1}{9}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} + \tfrac{1}{6}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} + \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c} = \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}\\
\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) &= \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} + \tfrac{1}{4}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}\urcorner\mathfrak{b})\mathfrak{c}\\
\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}) &= \tfrac{5}{9}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} - \tfrac{5}{12}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} + \tfrac{1}{6}(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}\\
\hline
\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) &= (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c},
\end{aligned}
$$

so ist:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c} &= \tfrac{5}{9}\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) - \tfrac{5}{12}\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) + \tfrac{1}{6}\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c})\\
&= \mathfrak{a}\{\mathfrak{b}(\tfrac{5}{3}\alpha\cdot - \tfrac{5}{6}\beta\times + \tfrac{1}{6}\,\mathsf{X})\mathfrak{c}\}\\
\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}) &= \tfrac{5}{9}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} - \tfrac{5}{12}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} + \tfrac{1}{6}(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}\\
&= \{\mathfrak{a}(\tfrac{5}{3}\alpha\cdot - \tfrac{5}{6}\beta\times + \tfrac{1}{6}\,\mathsf{X})\mathfrak{b}\}\mathfrak{c},
\end{aligned}
\tag{182}
$$

wodurch eine Multiplikation gegeben ist, die gestattet, auch in $(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}$ bezw. $\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c})$ die Assoziation zu ändern. Geben wir diese Multiplikation durch das Zeichen $\diagdown$ an, so ist also:

$$\diagdown = \tfrac{5}{3}\alpha\cdot - \tfrac{5}{6}\beta\times + \tfrac{1}{6}\,\mathsf{X} \tag{183}$$

$$(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\llcorner\mathfrak{c}) \qquad \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\llcorner\mathfrak{b})\mathfrak{c} \tag{173c}$$

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\urcorner\mathfrak{c}) \qquad \mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\urcorner\mathfrak{b})\mathfrak{c} \tag{173b}$$

$$(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\diagdown\mathfrak{c}) \qquad \mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{b}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\diagup\mathfrak{b})\mathfrak{c} \tag{184}$$

und:

$$3\alpha\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \tfrac{1}{3}\mathfrak{a}\llcorner\mathfrak{b} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\urcorner\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\diagdown\mathfrak{b}. \tag{185}$$

Die Multiplikation $\diagdown$ verhält sich zur deviatorischen Multiplikation genau so wie die dyadische zur skalaren, oder wie die affinorische zur vektorischen.

Die Betrachtung der Deviatorteile in Tabelle (164) und (166) ergibt die Gleichungen:

$$
(186)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\text{a)} & \left\{\begin{array}{l}
(\mathbf{a} \urcorner \mathbf{b})\, \overline{\mathsf{X}\rceil}\, \mathbf{c} = \quad \mathbf{b} \,\mathsf{X}\, (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \\
\mathbf{a}\, \overline{\mathsf{X}\rceil}\, (\mathbf{b} \urcorner \mathbf{c}) = \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,\mathsf{X}\, \mathbf{c}
\end{array}\right. \\
\text{b)} & \left\{\begin{array}{l}
(\mathbf{a} \urcorner \mathbf{b})\, \underline{\lfloor\mathsf{X}}\, \mathbf{c} = -(\mathbf{a}\mathbf{b})\, \overline{\mathsf{X}\rceil}\, \mathbf{c} = -\mathbf{a} \,\mathsf{X}\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\
\mathbf{a}\, \underline{\lfloor\mathsf{X}}\, (\mathbf{b} \urcorner \mathbf{c}) = -\mathbf{a}\, \overline{\mathsf{X}\rceil}\, (\mathbf{b}\mathbf{c}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,\mathsf{X}\, \mathbf{c}
\end{array}\right. \\
\text{c)} & \left\{\begin{array}{l}
(\mathbf{a}\mathbf{b})\, \underline{\lfloor\mathsf{X}}\, \mathbf{c} \quad = -\mathbf{b} \,\mathsf{X}\, (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \\
\mathbf{a}\, \underline{\lfloor\mathsf{X}}\, (\mathbf{b}\mathbf{c}) \quad = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,\mathsf{X}\, \mathbf{c}.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Da Produkte dieser Art, wie aus den Tabellen (163) und (165) hervorgeht, nur aus Teilen bestehen, die $\times$ und X enthalten, gilt offenbar z. B.:

$$
(\mathbf{a}\mathbf{b})\, \underline{\lfloor\mathsf{X}}\, \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \ulcorner \mathbf{b})\, \underline{\lfloor\mathsf{X}}\, \mathbf{c} = -(\mathbf{a}\mathbf{b})\, \overline{\lceil\mathsf{X}}\, \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{b})\, \underline{\mathsf{X}\rfloor}\, \mathbf{c}
$$

oder allgemein:

Regel: In einem Produkt von drei Vektoren, das eine Hauptmultiplikation innerhalb und eine deviatorisch abgeleitete außerhalb der Klammern enthält, ist sowohl Umklappen jedes einzelnen Zeichens als Umkehren von beiden Zeichen zugleich, beides aber nur mit Vorzeichenwechsel, gestattet.

Aus (186) leiten wir durch Zerlegen ab:

$$
(187)\quad \left\{
\begin{array}{l}
(\mathbf{a} \,\mathsf{X}\, \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \,\mathsf{X}\, \mathbf{a} - (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \,\mathsf{X}\, \mathbf{b} \\
\qquad\qquad = \frac{1}{2}\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \,\mathsf{X}\, \mathbf{c}) + \frac{3}{2}\mathbf{a} \,\mathsf{X}\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \,\mathsf{X}\, \mathbf{c}) = \mathbf{c} \,\mathsf{X}\, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{b} \,\mathsf{X}\, (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \\
\qquad\qquad = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \,\mathsf{X}\, \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + \frac{3}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,\mathsf{X}\, \mathbf{c}
\end{array}\right.
$$

$$
(188)\quad \left\{
\begin{array}{l}
(\mathbf{a} \,\mathsf{X}\, \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \,\mathsf{X}\, \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \,\mathsf{X}\, \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0 \\
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \,\mathsf{X}\, \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \,\mathsf{X}\, \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \,\mathsf{X}\, \mathbf{a}) = 0
\end{array}\right.
$$

$$
(189)\quad \left\{
\begin{array}{l}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,\mathsf{X}\, \mathbf{c} = -\frac{1}{3}(\mathbf{b} \,\mathsf{X}\, \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + \frac{1}{3}(\mathbf{c} \,\mathsf{X}\, \mathbf{a}) \times \mathbf{b} \\
\qquad\qquad = \frac{1}{2}\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \,\mathsf{X}\, \mathbf{c}) - \frac{1}{2}\mathbf{a} \,\mathsf{X}\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\
\mathbf{a} \,\mathsf{X}\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\frac{1}{3}\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \,\mathsf{X}\, \mathbf{b}) + \frac{1}{3}\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \,\mathsf{X}\, \mathbf{a}) \\
\qquad\qquad = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \,\mathsf{X}\, \mathbf{b}) \times \mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,\mathsf{X}\, \mathbf{c}
\end{array}\right.
$$

$$
(190)\quad \left\{
\begin{array}{l}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,\mathsf{X}\, \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \,\mathsf{X}\, \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \,\mathsf{X}\, \mathbf{b} = 0 \\
\mathbf{a} \,\mathsf{X}\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \,\mathsf{X}\, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \,\mathsf{X}\, (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0.
\end{array}\right.
$$

Es empfiehlt sich, diese Gleichungen mit den schon aus der Vektoranalysis bekannten (175) und (180) zu vergleichen. Folgende Tabelle gestattet eine Übersicht:

Assoziation (. .).

.	.	173—178	163, 165	⌉	$\overline{\cdot\vert}$	171	164, 166
×	·	172	163, 165	⌉	$\overline{\times\vert}$	173	164, 166
×	×	173—180	163, 165	⌉	$\overline{X\vert}$	186	164, 166
×	X	187, 189, 190	163, 165	⌉	$\lfloor\cdot$	171	164, 166
X	×	187—189	163, 165	⌉	$\lfloor\times$	173	164, 166
X	X	174, 176—179, 181, 182, 184	163, 165	⌉	$\lfloor X$	186	164, 166
⌉	⌉	164, 166		⌊	$\overline{\cdot\vert}$	171	164, 166
⌉	⌊	168	164, 166	⌊	$\overline{\times\vert}$	173	164, 166
⌊	⌋	167	164, 166	⌊	$\overline{X\vert}$	186	164, 166
⌊	⌊	164, 166		⌊	$\lfloor\cdot$	171	164, 166
×	⌊	167		⌊	$\lfloor\times$	173	164, 166
×	$\lfloor_{s}\cdot$	168		⌊	$\lfloor X$	186	164, 166
				╲	$\lfloor\times$	184	

Die Produkte von vier Vektoren. Nach (101) und (129) gilt für das affinorische Produkt zweier dyadischer Produkte von Einheitsvektoren:

(191) $$(\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s)(\mathbf{i}_t\mathbf{i}_u) = (\mathbf{i}_s\cdot\mathbf{i}_t)(\mathbf{i}_r\mathbf{i}_u) \qquad r, s, t, u = 1, 2, 3.$$

Die Anwendung des distributiven Gesetzes ergibt, daß diese Formel auch für beliebige Vektoren gilt:

(192) $$(\mathbf{a}\mathbf{b})(\mathbf{c}\mathbf{d}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\mathbf{d}).$$

Den Skalar dieses Produktes betrachtend, erhalten wir:

(193) $$(\mathbf{a}\mathbf{b})\,\overline{\vert\cdot\vert}\,(\mathbf{c}\mathbf{d}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}).$$

Dieses Produkt ist, da $\overline{\vert\cdot\vert}$ hier die Bedeutung $\beta^2\,\overline{\vert\;\vert} = \frac{1}{2}\,\overline{\vert\;\vert}$ hat, wie folgt zusammengesetzt:

(194) $$(\mathbf{a}\mathbf{b})\overline{\vert\cdot\vert}(\mathbf{c}\mathbf{d}) = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\,X\,\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\,X\,\mathbf{d})$$

und wir erhalten also die Gleichung:

(195) $$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}) = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\,X\,\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\,X\,\mathbf{d}).$$

Wir stellen daneben die aus (172) und (175) ableitbare:

(196) $$\begin{aligned}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}) &= \mp(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) \mp (\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d})\\ &= \mp(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) \mp (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}).\end{aligned}$$

Auflösung nach $(\mathbf{a}\,X\,\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\,X\,\mathbf{d})$ ergibt:

(197) $$(\mathbf{a}\,X\,\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\,X\,\mathbf{d}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}).$$

Diese Gleichung bildet, da jeder Deviator durch $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ dargestellt werden kann, den allgemeinen Ausdruck für das skalare Produkt zweier Deviatoren. Der Betrag eines Deviators berechnet sich also, da:

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a})(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}) - \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$$
$$= \tfrac{1}{6}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2 + \tfrac{1}{2} a_m{}^2 b_m{}^2 = a_m{}^2 b_m{}^2 (\tfrac{1}{6} \cos^2 \varphi + \tfrac{1}{2}) = a_m{}^2 b_m{}^2 \tfrac{1}{3}(2 - \tfrac{1}{2} \sin^2 \varphi)$$

ist, zu:

$$a_m b_m \sqrt{(\tfrac{1}{6} \cos^2 \varphi + \tfrac{1}{2})},$$

wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die bestimmenden Vektoren und φ der Winkel zwischen beiden ist. Da nach (173c) und (193) gilt:

$$(198) \qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \boxdot (\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d}) = \{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}\} \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \cdot \{\mathfrak{b}(\mathfrak{c}\mathfrak{d})\},$$

und da, wie sich leicht ableiten läßt:

$$(199) \qquad (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d}) = \{(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c}\} \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \cdot \{\mathfrak{b}\,(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d})\}$$
$$(200) \qquad (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = \{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}\} \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \cdot \{\mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})\}$$

ist, so ist nach (194), (198) und (174):

$$(201) \qquad (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \underline{\times} \mathfrak{d}) = \{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}\} \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \cdot \{\mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})\}.$$

Der Vektor des Produktes $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\mathfrak{d})$:

$$(202) \qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \overline{\times}\!\rceil (\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})(\mathfrak{a} \times \mathfrak{d})$$

setzt sich offenbar zusammen aus den Teilen:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{4}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \\ -&\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \\ -&\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \\ &\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \\ &\tfrac{1}{3}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})(\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \\ &\tfrac{1}{3}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d}). \end{aligned}$$

Diese Teile sind umzuformen. Aus (180) ist die Formel abzuleiten:

$$(203) \quad \begin{cases} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = \mathfrak{a} \times \{\mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})\} + \mathfrak{b} \times \{\mathfrak{a} \times (\mathfrak{d} \times \mathfrak{c})\} \\ \qquad = -\mathfrak{c} \times \{\mathfrak{d} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\} - \mathfrak{d} \times \{\mathfrak{c} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{a})\}, \end{cases}$$

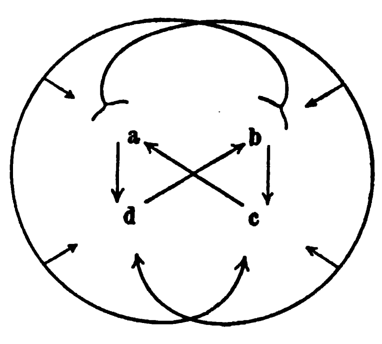
oder da, wie aus (175) folgt:

$$(204) \qquad (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d})(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})(\mathfrak{d} \times \mathfrak{b}) = \mp \mathfrak{b} \times \{\mathfrak{a} \times (\mathfrak{d} \times \mathfrak{c})\}$$

ist, auch:

$$(205) \quad \begin{cases} \mp (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d})(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})(\mathfrak{a} \times \mathfrak{d}) \\ \qquad + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})(\mathfrak{d} \times \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d})(\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}). \end{cases}$$

Diese drei Formeln sind ziemlich unübersichtlich. Ihre Bedeutung tritt klarer hervor durch folgende schematische Darstellung:



Die Summe zweier Produkte von der Form $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})$, deren Pfeile in der Figur aufeinander folgen, kann durch ein Produkt von der Form $\mathfrak{a}\times\{\mathfrak{b}\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})\}$ ersetzt werden.

Daneben ergibt die Anwendung von (175) die Formeln:

$$(206)\begin{cases} \mp(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) = \\ = \mathfrak{a}\{\mathfrak{b}\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})\}+\mathfrak{b}\{\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{d}\times\mathfrak{c}\} \\ = -\mathfrak{c}\{\mathfrak{d}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\}-\mathfrak{d}\{\mathfrak{c}\cdot(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a})\}. \end{cases}$$

Da $\llcorner$ bei Multiplikation von Affinoren (147) gleich $\frac{1}{2}\llcorner$ ist, ist ferner nach (192):

$$(207)\qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,\overline{\times}\,(\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{d})(\mathfrak{c}\mathfrak{b}).$$

Der Vektor dieses Produkts ist offenbar:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) + (\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{d}),$$

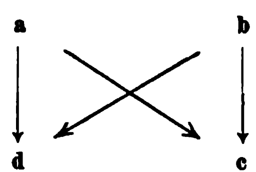
sodaß:

$$(208)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) + (\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{d}) = (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\times\mathfrak{d}) \\ \qquad\qquad - (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{d})(\mathfrak{c}\times\mathfrak{b}) \end{cases}$$

ist. In Verbindung mit (205) ergibt sich also:

$$(209)\quad \begin{cases} (\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{d}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{d})(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\times\mathfrak{d}) \\ \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\times\mathfrak{d}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d})(\mathfrak{a}\times\mathfrak{c}). \end{cases}$$

Diese Gleichung ist der allgemeine Ausdruck für das vektorische Produkt zweier Deviatoren, schematisch darstellbar durch:



Aus den Richtungen der Pfeile geht hervor, daß dieses Produkt sich nicht als Summe von zwei Produkten der Form $\mathfrak{a}\times\{\mathfrak{b}\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})\}$ schreiben läßt.

Aus (177) folgt zuletzt, daß

$$(210)\quad \begin{cases} (\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\{\mathfrak{b}\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})\} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\{\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})\} \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) \\ (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{c}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{d}) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{c}\{\mathfrak{d}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{d}\{\mathfrak{c}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\} \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{3}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{d})(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) \end{cases}$$

$$(\mathfrak{a}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) + (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\,\mathsf{X}\,(\mathfrak{c}\,\mathsf{X}\,\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\times\mathfrak{c})\times(\mathfrak{d}\times\mathfrak{b}) \\ - \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) - \tfrac{1}{3}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{d})(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}),$$

sodaß sich der Vektorteil von (ab)(cd) jetzt wie folgt zerlegen läßt:

$$(205)\quad \left\{ \begin{aligned} \tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= \tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d}) \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\times\mathbf{b}) + \tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \end{aligned} \right.$$

$$(210)\quad \left\{ \begin{aligned} -\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \mathbin{X} (\mathbf{c} \mathbin{X} \mathbf{d}) \\ -\tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) \end{aligned} \right\} = \begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \\ &-\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{d}) \\ &+\tfrac{1}{6}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) + \tfrac{1}{6}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \end{aligned}$$

$$(209)\quad \left\{ \begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{b})\times(\mathbf{c} \mathbin{X} \mathbf{d}) &= \tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d}) \\ &\quad - \tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\times\mathbf{b}) - \tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) \\ \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) &= \tfrac{1}{3}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \end{aligned}$$

$$(202)\qquad (\mathbf{a}\mathbf{b}) \,\overline{\times}\!\rceil\, (\mathbf{c}\mathbf{d}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d}).$$

Der Deviator des Produktes (ab)(cd):

$$(211)\qquad (\mathbf{a}\mathbf{b}) \,\overline{X}\!\rceil\, (\mathbf{c}\mathbf{d}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{d})$$

setzt sich offenbar zusammen aus den Teilen:

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \mathbin{X} (\mathbf{c}\times\mathbf{d}) \\ &\tfrac{1}{4}(\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) \\ &\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c} \mathbin{X} \mathbf{d}) \\ &-\tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{b}) \mathbin{X} (\mathbf{c} \mathbin{X} \mathbf{d}) \\ &\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c} \mathbin{X} \mathbf{d}) \\ &\tfrac{1}{3}(\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}). \end{aligned}$$

Von diesen lassen sich die drei ersten durch Anwendung der Formeln (187) und (189) folgendermaßen umgestalten:

$$(212)\quad \left\{ \begin{aligned} (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \mathbin{X} (\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b} \mathbin{X} \mathbf{c}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{d}) \\ &\quad + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d} \mathbin{X} \mathbf{b}) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c} \mathbin{X} \mathbf{a}) \\ (\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b} \mathbin{X} \mathbf{c}) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{d}) \\ &\quad + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d} \mathbin{X} \mathbf{b}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c} \mathbin{X} \mathbf{a}) \end{aligned} \right.$$

$$(213)\quad \left\{ \begin{aligned} (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c} \mathbin{X} \mathbf{d}) &= -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b} \mathbin{X} \mathbf{c}) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{d}) \\ &\quad - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d} \mathbin{X} \mathbf{b}) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c} \mathbin{X} \mathbf{a}), \end{aligned} \right.$$

schematisch anzugeben durch:

(a × b) X (c × d): – [Schema: a, b oben; d, c unten; Kreuz mit +, +; | –] (a X b) × (c × d): + | [Schema: a, b oben; d, c unten; Kreuz mit +, –; | –]

Aus dem Totalwert der Deviators (211) geht dann hervor, daß:

$$(214)\quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{cases}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d})\\ -\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\times\mathbf{b})-\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\\ +\tfrac{2}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})+\tfrac{2}{3}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),\end{cases}$$

schematisch darzustellen durch:

a $+\tfrac{2}{3}$ b

$-\tfrac{1}{2}$ $\tfrac{1}{2}$ $\tfrac{1}{2}$ $+\tfrac{1}{2}$

c $+\tfrac{2}{3}$ d

Der Deviator von (**ab**)(**cd**) läßt sich also folgendermaßen zerlegen:

$$(212)\quad \begin{cases}-\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=+\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d})\\ \qquad -\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\times\mathbf{b})-\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\end{cases}$$

$$(213)\quad \begin{cases}\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=-\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d})\\ \qquad +\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\times\mathbf{b})-\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\\ \tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=-\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d})\\ \qquad -\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\times\mathbf{b})+\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\end{cases}$$

$$(214)\quad \begin{cases}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d})\\ \qquad +\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\times\mathbf{b})+\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\\ \qquad -\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})-\tfrac{1}{3}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\end{cases}$$

$$\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$$

$$\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})=\tfrac{1}{3}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$(211)\quad (\mathbf{a}\mathbf{b})\ \overline{\times}\!\rceil\ (\mathbf{c}\mathbf{d})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d}).$$

Die Produkte mit der Assoziation $(\cdot\,\cdot)(\cdot\,\cdot)$ in den Grundmultiplikationen sind damit angegeben. Aus diesen lassen sich sämtliche mit anderen Multiplikationen ableiten. Folgende seien näher angegeben. Für die dyadischen und affinorischen Produkte von vektorischen oder deviatorischen Produkten von Vektoren ergibt sich:

$$(215)\quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\overline{}\!\rceil\,(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\mathbf{c})+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\mathbf{d})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\mathbf{c})$$

$$(216)\quad \begin{cases}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\mathbf{b})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\mathbf{a})+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\mathbf{b})\\ \qquad +(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\mathbf{a})+3\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})-3\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\end{cases}$$

$$(217)\quad \begin{cases}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\overline{}\!\rceil(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=+\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\mathbf{c})+\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\mathbf{d})+\tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\mathbf{d})\\ \qquad +\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\mathbf{c})-\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})-\tfrac{1}{3}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\\ \qquad -\tfrac{1}{3}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})\end{cases}$$

$$(218)\quad \begin{cases} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = -\frac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\mathbf{b}) - \frac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\mathbf{a}) - \frac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\mathbf{b}) \\ \qquad - \frac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\mathbf{a}) + \frac{3}{4}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) + \frac{3}{4}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) \\ \qquad + \frac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) + \frac{1}{3}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \\ \qquad - \frac{1}{6}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\,.\,\mathbf{d}). \end{cases}$$

Für die Produkte in den Grundmultiplikationen von affinorischen und dyadischen Produkten von Vektoren ergibt sich:

$$(219)\quad \begin{cases} (\mathbf{a} \urcorner \mathbf{b}) \div (\mathbf{c} \urcorner \mathbf{d}) = -\frac{2}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{d}\mathbf{c}) - \frac{2}{3}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\mathbf{a}) + \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \\ \qquad + \frac{7}{3}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) \end{cases}$$

$$(220)\quad (\mathbf{a} \urcorner \mathbf{b}) \,\bar{\times}\, (\mathbf{c} \urcorner \mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\mathbf{c}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\mathbf{a})$$

$$(221)\quad \begin{cases} (\mathbf{a} \urcorner \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \urcorner \mathbf{d}) = +\frac{2}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{d}\mathbf{c}) + \frac{2}{3}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\mathbf{a}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\mathbf{a}) \\ \qquad - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\mathbf{c}) + 2\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \\ \qquad - \frac{4}{3}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) \end{cases}$$

$$(222)\quad \begin{cases} (\mathbf{a}\mathbf{b}) \div (\mathbf{c}\mathbf{d}) = \frac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\mathbf{d}) + \frac{1}{3}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\mathbf{b}) + \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \\ \qquad - \frac{2}{3}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) \end{cases}$$

$$(207)\quad (\mathbf{a}\mathbf{b}) \,\bar{\times}\, (\mathbf{c}\mathbf{d}) = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\mathbf{b}) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\mathbf{d})$$

$$(223)\quad \begin{aligned} (\mathbf{a}\mathbf{b}) \times (\mathbf{c}\mathbf{d}) &= \tfrac{2}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\mathbf{d}) + \tfrac{2}{3}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\mathbf{b}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\mathbf{d}) \\ &\quad - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\mathbf{b}) + 2\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) - \tfrac{4}{3}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}). \end{aligned}$$

Die Produkte in den Hauptmultiplikationen außer (192) lauten:

$$(224)\quad \begin{cases} \mathbf{a} \urcorner \mathbf{b} \urcorner \mathbf{c} \urcorner \mathbf{d} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{d}\mathbf{c}) - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\mathbf{a}) \\ \qquad + 3\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) \\ \qquad = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\urcorner\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\urcorner\mathbf{d}) + (\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\urcorner\mathbf{b}) \\ \qquad + 3\alpha(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}) - 3\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) \end{cases}$$

$$(225)\quad \begin{cases} (\mathbf{a} \urcorner \mathbf{b}) \llcorner (\mathbf{c} \urcorner \mathbf{d}) = -(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\mathbf{a}) + \frac{3}{2}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \\ \qquad + \frac{1}{2}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) \end{cases}$$

$$(226)\quad \begin{cases} (\mathbf{a}\mathbf{b}) \llcorner (\mathbf{c}\mathbf{d}) = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\mathbf{d}) + \frac{1}{2}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\mathbf{b}) \\ \qquad + \frac{3}{2}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) - \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}). \end{cases}$$

Die Produkte mit den Assoziationen $\cdot\{\cdot(\cdot\cdot)\}$, $\{(\cdot\cdot)\cdot\}\cdot$, $\cdot\{(\cdot\cdot)\cdot\}$, $\{\cdot(\cdot\cdot)\}\cdot$ sind zum Teil schon mit angegeben worden. Sie leiten sich im übrigen in einfacher Weise aus den Regeln der Produkte dreier Faktoren ab. Folgende Tabelle gestattet eine Übersicht der wichtigsten Produkte von vier Faktoren:

Assoziation (· ·)(· ·):

· · ·	193—199, 216, 219, 221, 222—226
· · x	202, 203, 204, 208—210
· · X	211—214, 217, 218
x · x	194—196, 200
x x x	203, 205, 206, 208
x x X	213
x X x	212
x X X	210
X · X	194, 195, 197, 201
X x X	208, 209
X X X	214
· · └	207, 215—217, 219—225
x ┐ x	215
x └ x	216
X ┐ X	217
X └ X	218
┐ · ┐	219
┐ x ┐	220
┐ X ┐	221
└ · └	222
└ x └	207
└ X └	223
┐ ┐ ┐ ┐ ┌·┐ ┐ ┐ x̅┐ ┐ ┐ X̅┐ ┐	224
┐ └ ┐ ┐ └·┘ ┐	225
┐ └x ┐ ┐ └X̲ ┐	225
└ ┐ └	192
└ ┌·┐ └	193, 198
└ x̅┐ └	202
└ X̅┐ └	211
└ └ └ └ └·┘ └ └ └x └ └ └X̲ └	226

Assoziation ·{·(· ·)}

· · ·	[1]	
· · x	206, 210	
· x x	200	
· X X	201	
x · ·	[1]	
x x x	203, 204	
x x X	abzuleiten mit Hilfe von	(187)
x X x		(189)
x X X		(177)
X · ·	[1]	
X x x	abzuleiten mit Hilfe von	(175)
X x X		(187)
X X x		(189)
X X X		(177)

Die Produkte von Vektoren und Affinoren und von Affinoren unter sich. Eine erschöpfende systematische Darstellung der Eigenschaften sämtlicher in der Affinoranalysis möglichen Produktbildungen

1) Unmittelbar in die Assoziation (· ·)(· ·) überzuführen.

würde den Rahmen dieses Buches überschreiten. Da dasselbe nur eine Einführung in die Analysis bilden soll, mag die Behandlung derjenigen Produkte, die in der Infinitesimalrechnung und bei den physikalischen Anwendungen die wichtigste Rolle spielen, genügen. Alle anderen lassen sich übrigens leicht aus den bis jetzt angegebenen ableiten.

Von den Produkten eines Affinors mit einem Vektor sind folgende zu erwähnen:

1. Das vektordyadische Produkt:

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \tfrac{1}{3}A_s \cdot \mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}_v \times \mathbf{b} + \mathbf{A}_d \mathsf{X}\, \mathbf{b}. \tag{227}$$

Dieses Produkt läßt sich, da nach (173c)

$$(\mathbf{c}\mathbf{d})\mathbf{b} = \mathbf{c}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b})$$

ist, und $\mathbf{A}$ als Summe dreier dyadischer Vektorprodukte geschrieben werden kann, ausschließlich mit Hilfe der Multiplikationen der Vektoranalysis schreiben.

2. Das vektoraffinorische Produkt:

$$\mathbf{A}\ \overline{\times}\!\rceil\ \mathbf{b} = \tfrac{2}{3}A_s \cdot \mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}_v \times \mathbf{b} - \mathbf{A}_d \mathsf{X}\, \mathbf{b}. \tag{228}$$

Dieses Produkt läßt sich, da nach (173b)

$$(\mathbf{c}\dot{\mathbf{d}})\ \overline{\times}\!\rceil\ \mathbf{b} = \mathbf{c} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{b}),$$

ist, unter Verwendung der Multiplikation $\times$ in ähnlicher Weise auf die Vektoranalysis zurückführen. Da nach (227, 228)

$$\begin{cases} \mathbf{A}\ \overline{\times}\!\rceil\ \mathbf{b} = (\mathrm{K}\mathrm{C}\mathbf{A})\mathbf{b} \\ \quad \mathbf{A}\mathbf{b} = (\mathrm{K}\text{Ↄ}\mathbf{A})\ \overline{\times}\!\rceil\ \mathbf{b} \end{cases} \tag{229}$$

ist, sind beide Produktformen aufeinander zurückzuführen. Überdies ergibt sich nach zwei Seiten die Möglichkeit, die Rechnung mit den einfachen Operatoren $\mathbf{A}\ \lfloor\!\underline{\times}$ und $\mathbf{A}\ \overline{\times}\!\rceil$ auf die Vektoranalysis zurückzuführen, eine Möglichkeit, die zu dem Entstehen zweier Arten von Dyadenrechnungen Anlaß gegeben hat (vgl. S. 119 u. f.).

Offenbar gelten für diese Produkte die Beziehungen:

$$\begin{cases} (\mathrm{K}\mathbf{A})\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{A} \\ (\mathrm{K}\mathbf{A})\ \overline{\times}\!\rceil\ \mathbf{b} = \mathbf{b}\ \overline{\times}\!\rceil\ \mathbf{A}. \end{cases} \tag{230}$$

3. Das affinorische Produkt:

$$\mathbf{A} \urcorner \mathbf{b}.$$

Da nach (167):

$$(\mathbf{c}\mathbf{d}) \urcorner \mathbf{b} = \mathbf{c}(\mathbf{d} \times \mathbf{b})$$

ist, so ist für dieses Produkt ebenfalls eine vektoranalytische Ausdrucksweise vorhanden. Aus der Assoziativität von $\urcorner$ folgt:

(231) $\quad (\mathbf{ab}) \urcorner \mathbf{c} \urcorner \mathbf{d} \urcorner \mathbf{e} \ldots = \mathbf{a} \ldots [\{\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{d}\} \times \mathbf{e}] \ldots$

(232) $\quad (\mathbf{ABC} \ldots \mathbf{Y}) \urcorner \mathbf{z} = \mathbf{ABC} \ldots \mathbf{Y} \urcorner \mathbf{z},$

und aus (167):

(233) $\quad \mathbf{A} \urcorner \mathbf{b} = -\mathbf{Kb} \urcorner \mathbf{A}_k.$

4. Das vektorische Produkt:

(234) $\quad \mathbf{a} \times \mathbf{B} = \mathbf{a} \urcorner \mathbf{B} - \mathbf{B} \urcorner \mathbf{a}.$

Das wichtigste Produkt zweier Affinoren ist das assoziative affinorische. Da nach (173c) und (192):

$$(\mathbf{ab})\{(\mathbf{cd})\mathbf{e}\} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}) = \{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{ad})\}\,\mathbf{e} = \{(\mathbf{ab})(\mathbf{cd})\}\,\mathbf{e}$$

ist, so ergibt sich:

(235) $$\begin{cases} (\mathbf{AB})\mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{Bc}) = \mathbf{ABc} \\ \mathbf{a}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{aB})\mathbf{C} = \mathbf{aBC}, \end{cases}$$

oder allgemein:

(236) $$\begin{cases} (\mathbf{ABC} \ldots \mathbf{Y})\mathbf{z} = \mathbf{ABC} \ldots \mathbf{Yz} \\ \mathbf{a}(\mathbf{BC} \ldots \mathbf{Z}) \quad = \mathbf{aBC} \ldots \mathbf{Z}, \end{cases}$$

und da nach denselben Regeln:

$$\{(\mathbf{ab})\mathbf{c}\}\,\mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{ad}) = (\mathbf{ab})(\mathbf{cd}),$$

ist, so folgt:

(237) $$\begin{cases} (\mathbf{Ab})\mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{bc}) = \mathbf{Abc} \\ \mathbf{a}(\mathbf{bC}) = (\mathbf{ab})\mathbf{C} = \mathbf{abC}, \end{cases}$$

oder allgemein:

(238) $$\begin{cases} (\mathbf{ABC} \ldots \mathbf{X})\mathbf{yz} = \mathbf{ABC} \ldots \mathbf{Xyz} \\ \mathbf{ab}(\mathbf{CD} \ldots \mathbf{Z}) = \mathbf{abCD} \ldots \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Es gilt also die Regel:

Regel: Ein zeichenloses Produkt von mehreren Affinoren, mit einem oder zwei Vektoren an einem Ende bedarf keiner Klammern.

Reduziert sich in (235) der eine Affinor zu einem Vektor, so ergibt sich die Formel:

(239) $$\begin{cases} (\mathbf{A} \urcorner \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ \mathbf{a}(\mathbf{b} \urcorner \mathbf{C}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{C}. \end{cases}$$

Reduziert sich der andere Affinor in derselben Weise, so folgt:

(240) $$\begin{cases} (\mathbf{a} \urcorner \mathbf{B})\mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{Bc}) \\ \mathbf{a}(\mathbf{B} \urcorner \mathbf{c}) = (\mathbf{aB}) \times \mathbf{c}. \end{cases}$$

Da nach (173c) und (202):

$$\mathbf{a} \times \{(\mathbf{bc})\mathbf{d}\} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = (\mathbf{ad}) \overline{\times}\!\urcorner (\mathbf{cb}) = -(\mathbf{bc}) \overline{\times}\!\urcorner (\mathbf{da}),$$

ist:

$$(241)\qquad \begin{cases}(\mathbf{a} \rceil \mathbf{B})\mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{B}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{c}) \overline{\times\rceil}\, \mathbf{B}_k = - \mathbf{B} \overline{\times\rceil}\, (\mathbf{c}\mathbf{a}) \\ \mathbf{a}(\mathbf{B} \rceil \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{B}) \times \mathbf{c} = \mathbf{B}_k \overline{\times\rceil}\, (\mathbf{a}\mathbf{c}) = - (\mathbf{c}\mathbf{a}) \overline{\times\rceil}\, \mathbf{B}.\end{cases}$$

Reduzieren sich in (235) beide Affinoren zu Vektoren, so resultiert die schon erwähnte Formel:

$$(173\text{b})\qquad \begin{cases}(\mathbf{a} \rceil \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ \mathbf{a}(\mathbf{b} \rceil \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c},\end{cases}$$

die also ein Spezialfall von (235) ist.

Außer den assoziativen Produkten in $\rceil$:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A} \rceil \mathbf{b} \rceil \mathbf{c}, & \mathbf{a} \rceil \mathbf{b} \rceil \mathbf{C}, \\ \mathbf{a} \rceil \mathbf{B} \rceil \mathbf{c}, & \mathbf{A} \rceil \mathbf{b} \rceil \mathbf{C}, \\ \mathbf{A}\mathbf{B} \rceil \mathbf{c}, & \mathbf{a} \rceil \mathbf{B}\mathbf{C}, \end{array}$$

für die gilt:

$$(242)\qquad \begin{cases}\text{a)}\ K\mathbf{A} \rceil \mathbf{b} \rceil \mathbf{c} = \mathbf{c} \rceil \mathbf{b} \rceil \mathbf{A}_k \\ \text{b)}\ K\mathbf{a} \rceil \mathbf{B} \rceil \mathbf{c} = \mathbf{c} \rceil \mathbf{B}_k \rceil \mathbf{a} \\ \text{c)}\ K\mathbf{A} \rceil \mathbf{b} \rceil \mathbf{C} = - \mathbf{C}_k \rceil \mathbf{b} \rceil \mathbf{A}_k \\ \text{d)}\ K\mathbf{A}\mathbf{B} \rceil \mathbf{c} = - \mathbf{c} \rceil \mathbf{B}_k \mathbf{A}_k,\end{cases}$$

und von denen die beiden ersten nach (161b) die Umformung

$$(243)\qquad \begin{cases}\mathbf{a} \rceil \mathbf{b} \rceil \mathbf{C} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{C} - \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{C} \\ \mathbf{A} \rceil \mathbf{b} \rceil \mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{A}\mathbf{c}\mathbf{b}\end{cases}$$

gestatten, ist noch zu erwähnen:

$$(244)\qquad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{B}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{B}) \cdot \mathbf{c},$$

ableitbar durch Anwendung von (173c). Dieses Produkt kann, da nach (173c) und (198):

$$\mathbf{a} \cdot \{(\mathbf{b}\mathbf{c})\mathbf{d}\} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = (\mathbf{b}\mathbf{c}) \boxdot (\mathbf{d}\mathbf{a}) = (\mathbf{c}\mathbf{b}) \boxdot (\mathbf{a}\mathbf{d})$$

ist, noch in folgender Weise umgeformt werden:

$$(245)\qquad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{B}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{B}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{B} \boxdot (\mathbf{c}\mathbf{a}) = \mathbf{B}_k \boxdot (\mathbf{a}\mathbf{c}).$$

Von den Produkten von Affinoren unter sich ist außer dem assoziativen affinorischen besonders das skalaraffinorische wichtig. Da nach (194):

$$(246)\qquad \mathbf{A} \boxdot \mathbf{B} = \tfrac{1}{3} A_s \cdot B_s + \tfrac{1}{2} \mathbf{A}_v \cdot \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{A}_d$$

ist, entsteht dasselbe, indem die Teile der Affinoren, die von derselben Ordnung sind, jede Art für sich, skalar multipliziert werden. Dieses

Produkt nimmt in der Affinoranalysis eine ähnliche Stellung ein, in bezug auf Arbeitsberechnungen, wie das skalare in der Vektoranalysis. Da

$$(193)\qquad (\mathbf{ab}) \sqcap (\mathbf{cd}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

ist, läßt sich das Produkt auf die Symbole der Vektoranalysis zurückführen.

Die Produkte dreier Affinoren mit vektorischer und affinorischer Multiplikation gestatten folgende Umformungen:

$$\begin{cases} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = 2(\mathbf{ABC} - \mathbf{BAC} - \mathbf{CAB} + \mathbf{CBA}) \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 2(\mathbf{ABC} - \mathbf{ACB} - \mathbf{BCA} + \mathbf{CBA}), \end{cases}$$

also:

$$(247)\qquad \begin{cases} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = 0, \end{cases}$$

und ferner:

$$\begin{cases} (\mathbf{AB}) \times \mathbf{C} = \frac{1}{\beta}(\mathbf{ABC} - \mathbf{CAB}) \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{BC}) = \frac{1}{\beta}(\mathbf{ABC} - \mathbf{BCA}), \end{cases}$$

also:

$$(248)\qquad \begin{cases} (\mathbf{AB}) \times \mathbf{C} + (\mathbf{BC}) \times \mathbf{A} + (\mathbf{CA}) \times \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{BC}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{AB}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{CA}) = 0. \end{cases}$$

Reduzieren sich in diesen Gleichungen Affinoren zu Vektoren, so entstehen verschiedene andere zum Teil schon erwähnte Formeln. So ist (180) ein Spezialfall von (247).

Grundsätze der Formulierung. Die bei der Ausbildung des Systems befolgten Grundsätze, die auch für jedes System höherer Ordnung ihre Geltung behalten, seien am Ende dieses Kapitels kurz zusammengefaßt. Größen gleicher rotationaler Orientierung werden bis auf einen Zahlenfaktor identifiziert. Daraus folgt für das System zweiter Ordnung die Existenz dreier Größenarten, nähmlich der Skalaren, Vektoren und Deviatoren. Zu jeder dieser Größenarten gesellt sich eine Verknüpfungsweise, die in bezug auf die Addition distributiv ist, und die demnach als Multiplikation aufgefaßt werden darf. Von dieser Möglichkeit wird grundsätzlich Gebrauch gemacht, und jeder Grundmultiplikation sowie den Hauptmultiplikationen eigene Zeichen zugeordnet. Die Zeichen der Grundmultiplikationen werden so gewählt, daß sie eine einfache mnemotechnische Bedeutung haben. Die Zeichen der Hauptmultiplikationen sind möglichst einfach zu wählen, und zwar so, daß sie Zusammenstellungen mit anderen Zeichen zulassen. Kommutative Multiplikationen erhalten ein

Zeichen, das symmetrisch inbezug auf die vertikale Mittellinie ist, nicht kommutative ein asymmetrisches. Nur bei × wird von dieser Regel aus historischen und praktischen Rücksichten abgewichen (vgl. S. 165). Funktionen werden auf zwei Weisen dargestellt, und zwar sowohl durch einen vorgeschriebenen großen Vertikalbuchstaben, als durch den zugehörigen kleinen Buchstaben als unterem Index. Ersteres Zeichen wird verwendet bei Funktionen von Summen und Produkten, oder wenn man die Funktion deutlicher hervortreten lassen will, z. B.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}\mathbf{b},$$

der untere Index findet dagegen Anwendung, wo einmal gebildete Funktionen von Größen in weitere Formeln eingehen, und die Verwendung der großen vorgeschriebenen Zeichen, die überdies oft Klammern erfordern, die Formeln zu undurchsichtig machen würde. Z. B. schreibt man besser:

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}A_s \cdot \mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}_v \times \mathbf{b} + \mathbf{A}_d \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}$$

als:

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{S}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{V}\mathbf{A}) \times \mathbf{b} + (\mathbf{D}\mathbf{A}) \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}.$$

Aus der Verbindung der Hauptmultiplikationen mit den Funktionszeichen gehen die abgeleiteten Multiplikationen hervor. Die Zeichen von zwei derselben, ·⌉ und ⌊·, die kommutativ sind, werden symmetrisch ergänzt zu ⌈·⌉ und ⌊·⌋. Da sich alle Multiplikationen aus den Grundmultiplikationen und Funktionen herleiten lassen, und diese beiden auf alle Größen des Systems anwendbar sind, gibt es im System keine multiplikativen Verknüpfungen, die ohne Bedeutung sind, und keine, die nicht zum System gehören. Es ist also z. B. das Produkt $\mathbf{a} \times b$ gleich null, und nicht, wie in der herkömmlichen Vektoranalysis, bedeutungslos, während die Zahlen mit den Skalaren des Systems identifiziert sind, und es also keine dem System fremde Multiplikation von gewöhnlichen Zahlen mit Zahlen des Systems mehr gibt. Nur dadurch wird es möglich werden, die Infinitesimalrechnung vollkommen sachgemäß zu gestalten, und in ihr mancherlei Verwirrungen und Schwierigkeiten zu beseitigen, wie sich im fünften Kapitel zeigen lassen wird. Besonders wichtig für die richtige Ausbildung des Systems ist es, daß jede Multiplikation ihr Zeichen erhält. Um das Schreiben der Formeln zu erleichtern, dürfen zwar einzelne dieser Zeichen, soweit sie vorher genau angegeben werden, in Produkten unterdrückt werden, aber sie sind da und können stets zum Gebrauch herangezogen werden. Letzteres geschieht stets, wenn Operatoren einzeln zur Darstellung gebracht werden müssen, auch wenn das Zeichen sonst unterdrückt wird, z. B.:

$$\mathbf{A}\mathbf{b}, \quad \text{aber} \quad \mathbf{A}\lfloor\!\times.$$

Eine Analysis, der hier das Zeichen überhaupt fehlt, kann keinen Unterschied machen zwischen der Größe A und dem Operator $A\lfloor^{\times}$, ein Umstand, der, wie die Erfahrung gezeigt hat, zu mannigfachen Verwirrungen Anlaß geben kann.

Schluß. Die freien Multiplikationsregeln wären damit der Hauptsache nach und soweit wie es für praktische Zwecke vorläufig wohl genügt, abgeleitet, und das Prinzip ihrer Bildung angegeben. Es sind jetzt an Hand dieser Regeln die in der Analysis auftretenden Operatoren geometrisch zu deuten. Insbesondere ist dabei auf die auf Vektoren wirkenden einfachen Operatoren Rücksicht zu nehmen, da die mathematische Physik gerade für diese das größte Interesse hat. Bei der Behandlung dieser Operatoren, der Dyaden, werden wir mannigfachen früheren Bestrebungen, Operatoren und auch Größen zweiter Ordnung in direkter Weise zur Darstellung zu bringen, begegnen. Es erwächst also die Aufgabe, die Stellung der Affinoranalysis diesen anderen Rechnungsweisen gegenüber klar zu stellen. Diese Aufgaben bleiben dem nächsten Kapitel vorbehalten.

Viertes Kapitel.

Die Dyadenrechnung und die Beziehungen der Affinoranalysis zu anderen Analysen zweiter Ordnung.

Die vektorisch abgeleiteten Produkte von Affinoren mit Vektoren. Ist ein Affinor mit einem Vektor durch eine vektorisch abgeleitete Multiplikation verknüpft, so ist das Produkt wieder ein Vektor. Die Operatoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,\times\!\urcorner &= \ulcorner\!\times\,\mathbf{A}, \\ \mathbf{A}\,\ulcorner\!\times &= \times\!\urcorner\,\mathbf{A}, \\ \mathbf{A}\,\llcorner\!\times &= \times\!\lrcorner\,\mathbf{A}, \\ \mathbf{A}\,\times\!\lrcorner &= \llcorner\!\times\,\mathbf{A} \end{aligned}$$

sind also, auf Vektoren angewandt, einfache. Sie heißen in diesem Falle Dyaden. Da nun, wie aus (228) und (229) hervorgeht:

$$(249)\quad \begin{cases} \text{a)}\ \mathbf{A}\,\times\!\urcorner\,\mathbf{b} = (\mathrm{C}\mathbf{A})\,\times\!\lrcorner\,\mathbf{b} = (\mathrm{KC}\mathbf{A})\,\mathbf{b}, \\ \text{b)}\ \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad = (\text{Ɔ}\mathbf{A})\,\ulcorner\!\times\,\mathbf{b} = (\mathrm{K}\text{Ɔ}\mathbf{A})\,\times\!\urcorner\,\mathbf{b} \end{cases}$$

ist, läßt sich jede Dyade entweder als $\mathbf{A}\,\llcorner\!\times$ oder als $\mathbf{B}\,\times\!\urcorner$ darstellen. Es gibt demnach in dieser Hinsicht keine verschiedenen Arten von Dyaden. In Worten lautet (249):

> Regel: Ein Affinor gibt mit der vektordyadischen Multiplikation $\llcorner\!\times$ dieselbe Dyade wie sein konjugierter unterer Affinor mit der vektoraffinorischen Multiplikation $\times\!\urcorner$.

Die Darstellung $\mathbf{A}\,\llcorner\!\times$ nennen wir die normale, für diese gilt die wichtige Beziehung:

$$(227)\qquad \mathbf{A}\mathbf{b} = \tfrac{1}{3}\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}_v \times \mathbf{b} + \mathbf{A}_d \mathbin{X} \mathbf{b}.$$

Wir nennen $\mathbf{A}\,\times\!\urcorner$ die obere, $\mathbf{A}\,\llcorner\!\times$ die untere Dyade zu dem Affinor $\mathbf{A}$, dagegen $\mathbf{A}$ den unteren Affinor zur Dyade $\mathbf{A}\,\times\!\urcorner$ und den oberen zur Dyade $\mathbf{A}\,\llcorner\!\times$.

Leiten zwei Dyaden sich vermittels derselben Multiplikation, der eine von einem Affinor und der andere von seinem Konjugierten, ab, so heißen sie konjugiert. Da, wie aus (227) und (228) hervorgeht:

$$(250)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{A}_k \\ \mathfrak{A}\ \overline{\times|}\ \mathfrak{b} = \mathfrak{b}\ \overline{\times|}\ \mathfrak{A}_k, \end{cases}$$

so gilt für Dyaden:

$$(251)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}\ \underline{|\times} = \underline{|\times}\ \mathfrak{A}_k \\ \mathfrak{A}\ \overline{\times|} = \overline{\times|}\ \mathfrak{A}_k. \end{cases}$$

Bei Anwendung dieser Operatoren auf andere Größen als Vektoren gelten diese Gleichungen nicht, sie gelten eben nur für Dyaden.

Da jeder Affinor sich als Vielfachsumme von höchstens drei affinorischen oder dyadischen Vektorprodukten angeben läßt, und

$$(173\text{c})\qquad \begin{cases} (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) \\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} \end{cases}$$

ist, sowie

$$(173\text{b})\qquad \begin{cases} (\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b})\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\ \overline{\times|}\ \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) \\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \urcorner \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\ \overline{\times|}\ (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}, \end{cases}$$

Gleichungen in denen rechts nur die Multiplikationen $\cdot$ und $\times$ auftreten, so ergibt sich nach zwei Seiten hin eine Möglichkeit, die Dyadenrechnung auf die Vektoranalysis zurückzuführen, oder umgekehrt, ausgehend von der Vektoranalysis, eine Analysis zweiter Ordnung aufzubauen. In der Tat sind verschiedene Autoren in dieser Weise vorgegangen.

Herleitung der Produkte $\llcorner$ und $\urcorner$ zweier Vektoren und der Produkte $\underline{|\times}$ und $\overline{\times|}$ eines Affinors mit einem Vektor aus den Produkten der Vektoranalysis. Als erster ist hier Graßmann zu nennen. Schon in seiner ersten Ausdehnungslehre (1844) führte er das sogenannte offene Produkt oder Lückenprodukt ein. Sind A, B und P Ausdehnungsgrößen, die ein gemischtes Produkt bilden,

$$AB\cdot P,$$

so läßt sich dieses Produkt auch schreiben:

$$[A(\ )\cdot B]\,P,$$

wo ( ) die Lücke bezeichnet, in welche P eingesetzt werden muß.

$$[A(\ )\cdot B]$$

nannte Graßmann nun ein offenes Produkt. Sind insbesondere $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ Monovektoren[1]), so ist die Kombination von Lückenprodukten

$$[\mathfrak{a}(\ )\cdot\mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}(\ )\cdot\mathfrak{b}] + [\mathfrak{c}(\ )\cdot\mathfrak{c}]$$

eine Größe, die, mit Bivektoren multipliziert, dieselben in Monovektoren

1) Wir bezeichnen hier die Monovektoren wie gewöhnlich, Graßmann verwendet Kursivbuchstaben.

umsetzt. Die Beziehung, in der diese Größe, die dieselbe rotationale Orientierung hat wie ein Tensor, zu dem Ellipsoid mit den konjugierten Halbachsen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ steht[1]), wurde von Graßmann auch schon angegeben. Es ist wichtig zu bemerken, daß Graßmann nicht nur die neue durch Assoziationsänderung entstehende Verknüpfungsweise als Multiplikation bezeichnet, sondern auch das entstehende Produkt als Größe und nicht nur als Operator auffaßt, wenn er schreibt:

> „Da dies Ellipsoid demnach der vollkommen treue Ausdruck jener Summe ist, so können wir auch sagen, diese Summe sei eine solche Größe, die ein Ellipsoid darstellt und selbst als Ellipsoid gedacht werden könne. Auf diese Weise nun ist der Begriff jener Summe, welcher anfangs nur formell auftrat, auf seine reelle Bedeutung zurückgeführt."[2])

In der zweiten Ausdehnungslehre (1862)[3]) behandelte Graßmann die offenen Produkte eingehender. Besonders ging er auf die Bestimmung der unveränderlichen Richtungen ein, und dehnte den Begriff auch auf Produkte mit mehreren Lücken aus. Auch findet sich bei ihm[4]) eine Darstellung des Lückenproduktes als Quotient.

In ähnlicher Weise wurde Hamilton in seiner Quaternionentheorie dazu geführt, in der Gleichung:

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{a}S\mathfrak{b}\mathfrak{r} + \mathfrak{c}S\mathfrak{d}\mathfrak{r} + \mathfrak{e}S\mathfrak{f}\mathfrak{r}\ ^{5)}$$

die Assoziation zu ändern:

$$\mathfrak{r}' = \varphi\mathfrak{r}.^{6)}$$

$\mathfrak{r}'$ nannte er eine „linear Vectorfunction", φ betrachtete er zunächst nur als das charakteristische oder Funktionszeichen einer solchen Funktion. In weiterer Hinsicht erschienen ihm dann diese Zeichen auch als Operatoren, deren Produkte er ableitete. Der Operator φ Hamiltons ist also gleich der Dyade

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\mathfrak{d} + \mathfrak{e}\mathfrak{f}) \underline{|\times}$$

in unserem Sinne (d. h. mit $\mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{i}_1 = -1$). Hamilton behandelte die linearen Vektorfunktionen in seinen „Lectures on Quaternions"[7]) und später ausführlicher, in den „Elements of Quaternions"[8]), wo der Begriff auch auf Quaternionen ausgedehnt wurde. Obwohl die Graßmannsche Definition des

---

1) Vgl. S. 150. 2) 44. 1, 94. 1, S. 291. 3) 62. 1, 96. 1.

4) 62. 1, 96. 1, S. 240 f.

5) Vektoren sind wie gewöhnlich dargestellt. Hamilton verwendete kleine griechische Buchstaben. Das Zeichen der Multiplikation $\times$ ist unterdrückt.

6) Hamilton verwendete für Dyaden die letzten Buchstaben des kleinen griechischen Alphabets und verknüpfte sie ohne Verknüpfungszeichen unter sich und mit Vektoren. Diese Schreibweise ist hier beibehalten.

7) 53. 1. 8) 66. 1.

offenen Produkts viel allgemeiner ist und die Hamiltonsche Aufstellung mit umfaßt, hat sich Hamilton namentlich dadurch verdient gemacht, daß er mit Hilfe der Symbole φ eine schon ziemlich leicht zu handhabende Analysis schuf, die im Keim schon alles enthielt, was als zur eigentlichen Dyadenrechnung in unserem Sinne gehörig betrachtet werden muß. In Übereinstimmung mit dem Grundsatze, dem auch Gauß huldigte, daß nämlich eine Multiplikation keine Teiler der Null aufweisen darf, ein Grundsatz, der ihm auch verbot,

$$\mathbf{S a \times b}$$

$$\mathbf{V a \times b}$$

als neue Produktarten zu betrachten, faßte Hamilton auch die Verknüpfung

$$\mathbf{a S b}$$

nicht als eine Multiplikation auf, die mit einem eigenen Zeichen versehen werden dürfte.

Indem Gibbs die Synthesis der Graßmannschen und Hamiltonschen Auffassungen vollzog, gelang es ihm, eine sehr einfache Analysis zweiter Ordnung aufzubauen, und zwar in folgender Weise. Die Gibbssche Vektoranalysis hat das +-Zeichen für die Quadrate der Einheitsvektoren, und stellt das skalare Produkt (von Gibbs „direct product" genannt) durch · dar. Dieses Zeichen kann nur zwischen Vektoren Verwendung finden. Die Multiplikation von Zahlen und Vektoren hat bei ihm kein Zeichen. Es stellt demnach

$$\mathbf{ab \cdot c}$$

bei ihm ohne Zweideutigkeit dar, was wir schreiben:

$$\mathbf{a(b \cdot c) = (ab)c}. \tag{173c}$$

Gibbs änderte nun, ebenso wie Hamilton, die Assoziation in diesem Produkt, behielt aber die Zeichen an derselben Stelle. Dadurch gewann er den Vorteil, Klammern überhaupt entbehren zu können:

$$\mathbf{(ab) \cdot c = a(b \cdot c) = ab \cdot c}. \tag{252}$$

Eine Summe:

$$\mathbf{ab \cdot g + cd \cdot g + ef \cdot g}$$

konnte er da schreiben:

$$\mathbf{(ab + cd + ef) \cdot g = \Phi \cdot g}.\text{[1]} \tag{253}$$

1) Gibbs verwendete für Vektoren kleine griechische Buchstaben, sein Schüler Wilson später Klarendonbuchstaben. Beide verwendeten für Dyaden große griechische Buchstaben.

Durch die Art der Ableitung identifizierte er dabei aber die Multiplikation von Affinoren mit Vektoren mit der skalaren Multiplikation und ließ die neue Verknüpfung zeichenlos (vgl. S. 116). Diese neue Verknüpfung faßte Gibbs in Anschluß an Graßmann als Multiplikation auf und nannte das Resultat, was wir also einen Affinor nennen, eine Dyade. Eine Summe von mehreren Dyaden, ein allgemeiner Affinor also, nannte Gibbs „dyadic". Über die Natur dieser Dyadics schreibt er:

> „The dyadic is practically the linear vector operator regarded as quantity. More exactly it is the multiple quantity of the ninth order which affords various operators according to the way in which it is applied."[1])

Er faßte die Dyadic also mit Graßmann als Größe auf.[2]) Das neue Produkt bezeichnete er mit dem Namen „indeterminate product", indem er sich dabei auf die von Graßmann[3]) definierte Multiplikation bezog, bei der die Produkte der Einheiten keinen besonderen Bedingungen unterworfen sind[4]) (vgl. S. 5). Mit „indeterminate" will Gibbs[5]) also sagen: keinen besonderen Bedingungen unterworfen. Wilson hat diesen Ausdruck aber später folgendermaßen zu erklären gesucht:

> „The reason for the term indeterminate is this. The two products $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ and $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ have definite meanings. One is a certain scalar, the other a certain vector. On the other hand the product $\mathbf{ab}$ is neither vector nor scalar — it is purely symbolic and acquires a determinate physical meaning only when used as an operator"[6])

eine Erklärung, die wir für weniger richtig halten, weil sie erstens der ursprünglichen Gibbsschen Auffassung nicht entspricht, zweitens $\mathbf{ab}$ eine ebenso „definite meaning" hat, eben „a certain dyadic" ist, die Dyadics aber nach Gibbs's eigener Erklärung ebenso berechtigte Größen sind wie Skalare und Vektoren, und drittens, weil auch die Dyadic als Größe eine ganz bestimmte physikalische Bedeutung haben kann. Übrigens betrachtete auch Wilson, wie aus seinem interessanten Aufsatz über das System von Burali Forti und Marcolongo hervorgeht[7]), die Dyadics als Größen und bezog sich seine Aussage wie es scheint also nur auf ihre physikalische Bedeutung.

---

1) 93.4, 06.1, S. 179.

2) Die 1912 von Burali Forti und Marcolongo gemachte Bemerkung, es sei überhaupt nicht zu entscheiden, ob Gibbs mit seiner Dyade eine Größe oder einen Operator gemeint hat (12.3, S. 17) erweist sich also als unbegründet.

3) 55.1, siehe auch 75.1, S. 17 f. 4) 86.1, 06.1, S. 109.

5) 01.2, S. 272. 6) 01.2, S. 272.

7) 10.7, namentlich S. 429—431.

Dagegen hat G. Jaumann 1905 ausdrücklich betont, daß die Dyadics, für die er den Namen Dyaden verwendet, „ebenso große geometrische und physikalische Bedeutung" haben „wie die Graßmannschen Produkte". Er betrachtet sie als „ebenso reale, ihrer Größe, Form und Lage nach vorstellbare Gebilde", und sie sind ihm „keineswegs" „nur symbolische analytische Operatoren."[1]) Jaumann hat zuerst von der zweiten möglichen Zurückführung der Analysis zweiter Ordnung auf Symbole der Vektoranalysis Gebrauch gemacht. Im Gegensatz zur gewöhnlichen Gibbsschen Dyade, von ihm „skalare" oder „lineare" Dyade genannt, und dargestellt durch:

$$\mathbf{a} \,;\, \mathbf{b} \qquad \text{(der Affinor } \mathbf{ab}\text{)}$$

definierte er als „planare" oder „rotorische" Dyade:

$$\mathbf{a} \overset{\times}{;} \mathbf{b} \qquad \text{(der Affinor } \mathbf{a} \urcorner \mathbf{b}\text{)}$$

durch die Assoziationsänderung:

$$\begin{cases} (\mathbf{a} \overset{\times}{;} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \overset{\times}{;} \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} \end{cases} \tag{254}$$

für jeden Vektor $\mathbf{c}$. Die affinorische Multiplikation von Vektoren stellte er also dar durch $\overset{\times}{;}$ und identifizierte er wie Gibbs durch die Art der Ableitung die vektordyadische Multiplikation mit der skalaren.

Zu den Gibbsschen und Jaumannschen Identifizierungen der Multiplikationen zwischen Größen höherer Ordnung und Vektoren mit bekannten Multiplikationen der Vektoranalysis hat F. Jung 1909 die sehr richtige Bemerkung gemacht, daß es nicht zu erwarten ist,

„daß man mit den verschiedenen Multiplikationsmöglichkeiten zwischen Vektoren auch gerade die Multiplikationsmöglichkeiten zwischen Vektor und Dyade vor sich hat".[2])

Er möchte also hier andere Zeichen einführen und etwa schreiben

$$(\mathbf{a} \,;\, \mathbf{b}) | \cdot \mathbf{c}$$
$$(\mathbf{a} \overset{\times}{;} \mathbf{b}) | \cdot \mathbf{c},$$

oder, was ihm noch berechtigter vorkommt, den Unterschied zwischen linearer und planarer Dyade in die jedesmalige Verknüpfungsweise mit dem Vektor $\mathbf{c}$ und nicht in die Verknüpfungsweise zwischen den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ legen. Er schreibt also:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) | \cdot \mathbf{c}$$
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \times\times \mathbf{c}$$

und sieht in dieser Formel jedesmal dieselbe Dyade, die nur das einemal

1) 05.6, S. 28. 2) 09.16, S. 388.

linear, das anderemal planar „genommen“ wird, je nachdem sie in der einen oder in der anderen Weise auf $\mathbf{c}$ wirkt. Es ist nun bemerkenswert, daß die Affinoranalysis in der Tat beiden Meinungen, der Jaumannschen sowohl wie der Jungschen einen Platz zuerkennt, denn es ist nach (173b) nicht nur:

$$\begin{cases}(\mathbf{a} \llcorner \mathbf{b}) \llcorner^{\times} \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ (\mathbf{a} \urcorner \mathbf{b}) \llcorner^{\times} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),\end{cases}$$

wodurch die Jaumannsche Ansicht eine Bestätigung erfährt, sondern auch

$$\begin{cases}(\mathbf{a} \llcorner \mathbf{b}) \llcorner^{\times} \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ (\mathbf{a} \llcorner \mathbf{b}) \times\!\urcorner \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),\end{cases}$$

wie Jung es verlangt. Dies findet seinen Grund offenbar darin, daß zwei Vektoren zwei Affinoren bestimmen, einen oberen durch $\urcorner$ und einen unteren durch $\llcorner$, und daß ferner, nach der S. 118 angegebenen Regel, der untere mit der vektoraffinorischen Multiplikation dieselbe Dyade (in unserem Sinne) bildet, wie der obere mit der vektordyadischen Multiplikation:

$$\mathbf{A} \times\!\urcorner \mathbf{b} = (KC\mathbf{A}) \llcorner^{\times} \mathbf{b}. \tag{249a}$$

Damit fällt dann aber auch die Unterscheidung zwischen linearer oder skalarer und planarer oder rotorischer Dyade[1]), und die einzige Frage, die hier noch Sinn hat, ist die, ob eine gegebene Dyade zu einem gegebenen Affinor etwa die untere oder die obere Dyade ist.

Die Jaumannsche Entdeckung der neuen Verknüpfungsweise von Vektoren bedeutete einen ganz besonderen Fortschritt. Wie wir im sechsten Kapitel (namentlich S. 216 ff.) sehen werden, gestalten sich die Formeln der Mechanik erst durch die Anwendung dieser Verknüpfungsweise in vollkommen adäquater Weise. Im übrigen ist die Jaumannsche Analysis bis auf einige Abweichungen der Notation, die wir teilweise noch berühren werden, der Gibbsschen gleich.

Auch Jung betrachtete die Größen höherer Ordnung als vollkommen gleichberechtigt. Der Name „Dyade“ erinnert immer an das durch Assoziationsänderung entstandene Produkt zweier Vektoren, während doch die allgemeine Größe bis zur zweiten Ordnung nicht als ein solches Produkt, sondern und nur als Produktensumme dargestellt werden kann.

---

1) Der Fortfall der Bezeichnungen linear und planar, die hier in einer von der ursprünglichen (Gibbsschen) ganz abweichenden Bedeutung (vgl. S. 145) verwandt werden, und ebenso der Fortfall der Bezeichnungen skalar und rotorisch, wo weder von einem Skalar noch von einer Rotation die Rede ist, dürfte wohl als ein besonderer Vorzug bezeichnet werden.

Jung schlug daher für die allgemeine Größe den neuen Namen „Affinor" vor[1]):

> „Die Benennung „Dyade" für Φ haftet ganz an dieser doch immerhin zufälligen Darstellungsweise, während der Affinor eine von dieser ganz unabhängige Größenart bedeutet wie der Vektor und Skalar."[2])

Obwohl die Bildung neuer Multiplikationen durch Assoziationsänderung als ein großer Fortschritt betrachtet werden muß, weil eine Analysis zweiter Ordnung zunächst wohl nur auf diese Weise entstehen konnte, ist die Identifikation von $\llcorner\!\times$ mit einer Multiplikation der Vektoranalysis, wo uns jetzt die eigentliche Natur dieser Verknüpfungsweisen bekannt ist, nicht länger aufrecht zu erhalten.

Burali Forti und Marcolongo haben versucht, ein eigenes System zweiter Ordnung aufzubauen. Ihre Analysis befaßt sich nur mit den Operatoren, die eine affine Transformation von Vektoren herbeiführen. Diese Operatoren, die wir Dyaden nennen, nennen sie „omografie vettoriali". Affinoren kommen also in ihrer Analysis nicht vor. Die Verbindung zweier Vektoren zu einer Dyade:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,\llcorner\!\times$$

schreiben sie:

$$\mathrm{H}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}),$$

sodaß

$$\mathrm{H}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) \tag{255}$$

an die Stelle von

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) \tag{173 c}$$

tritt. Sie gelangen hierdurch zu einer äußerst komplizierten Notation. Daß es da, wo man die Multiplikationen $\cdot$ und $\times$ wirklich als Multiplikationen auffaßt, keinen Sinn hat, die höheren Multiplikationen χ usw. und die Kombinationen wie $\overset{\cdot}{\times}$, $\llcorner$, $\urcorner$ nicht in derselben Weise zu behandeln, mag dem Leser auf den vorhergehenden Seiten deutlich geworden

1) Dieser Name, der uns sehr glücklich gewählt erscheint, ist auch im vorliegenden Buche ausschließlich verwandt. Da wir dabei überall prinzipiell unterscheiden zwischen den Größen und den zugehörigen Operatoren, war noch ein Name für die häufig vorkommenden einfachen Operatoren der Form

$$\mathrm{A}\,\llcorner\!\times = \mathrm{B}\,\overline{\times}\!\urcorner$$

nötig. Hier haben wir das Wort „Dyade" gewählt. Allerdings ist dieses Wort dabei nicht im Sinne seines Urhebers gebraucht. Da es aber, dem besseren Ausdruck „Affinor" gegenüber, doch in Fortfall käme, erscheint es nicht unangemessen, es in etwas veränderter Bedeutung beizubehalten, zumal es sich durch Kürze und Wohllaut unterscheidet.

sein. Vom Standpunkte einer durchgehend einheitlichen Behandlung sämtlicher Größen höherer Ordnung ist eine Bezeichnung wie:

$$H(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$$

also durchaus unsachgemäß zu verwerfen. Aber, auch ohne auf diese Beziehungen zurückzugehen, ist es klar, daß in dieser Schreibweise kein Fortschritt der Gibbsschen gegenüber zu erblicken ist.

Die Behandlung der Dyadenrechnung weicht ferner insoweit von der Gibbsschen ab, daß zunächst[1]) verschiedene Eigenschaften der Dyaden abgeleitet werden, bevor dieselben durch das Funktionszeichen H auf Vektoren zurückgeführt werden.[2]) Diese Art der Darstellung, die mit der schon in Kapitel I zur Sprache gebrachten persönlichen Vorliebe der Autoren für koordinatenfreie Ableitungen zusammenhängt, ist alles weniger als einfach und könnte übrigens bei jeder anderen Notation auch gewählt werden. Außer einigen kleinen Änderungen der Notation, die teilweise als Fortschritte der Gibbsschen Analysis gegenüber zu betrachten sind, und an anderen Stellen vermerkt wurden (vgl. S. 138, 143, 208 ff.), ist das System ferner im wesentlichen dem Gibbsschen gleich. Die Autoren haben den Gebrauch des Systems, durch Verwendung der komplizierten Notation für das Gibbssche Produkt und durch Nichtbeachtung des Jaumannschen Produktes zweier Vektoren, sehr erschwert, und sich, indem sie sich im Gegensatz zu allen früheren Autoren außer Hamilton bloß auf Operatoren beschränkten, den Weg zur richtigen Ausbildung ihrer Analysis verschlossen.

Dies ist um so mehr zu bedauern, da sie sich im übrigen durch das Ausrechnen vieler nützlicher Beziehungen der Analysis zweiter Ordnung, sowie durch verschiedene hübsche geometrische und physikalische Anwendungen verdient gemacht haben. Daß sie ihre Notation als die einzig richtige der klaren und einfachen Gibbsschen gegenüberstellen und über letztere nur die schärfsten Urteile sprechen können, ist geradezu erstaunlich. Urteile wie:

„Cette théorie de Gibbs, considérée comme une des premières tentatives, a eu certainement sa valeur.“

„Mais leur valeur reelle est presque nulle.“[3])

„...ainsi pour Gibbs toute homographie dépend de neuf vecteurs, dont trois sont fixes; tandis que pour nous une homographie est indépendante de tout vecteur de référence.“

„En résumé, les notations de Gibbs sont en condradiction avec les lois fonctionelles, claires, simples et fécondes de Hamilton; et les par-

---

1) 09.12, § 1 und erste Hälfte § 2.

2) Dies geschieht erst auf S. 20.

3) 11.1, S. 277.

ties utiles et pratiques de sa theorie des transformations linéaires restent cachées sous un symbolisme incommode et incorrect.“

„Ces défauts arrivent à un maximum dans l'ouvrage de M. Jaumann.“ [1])

sind doch zum mindesten als sehr ungerechtfertigt zu bezeichnen und wären wohl am wenigsten geeignet eine Einigung in den vektoranalytischen Bezeichnungen herbeizuführen.

Die Dyade als Zeichen einer affinen Transformation. Da jeder Affinor $\mathbf{A}$ sich nach (118), (129) und (145) ausdrücken läßt in den 9 algebraischen Einheiten:

$$\mathbf{I}_{11} = -\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{I}_{23} = -\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{I}_{32} = -\mathbf{i}_3\mathbf{i}_2, \text{ cycl.}, \tag{256}$$

setzt die Dyade $\mathbf{A}\,\lfloor\!\times$ nach (173c) einen Vektor $\mathbf{r}$ in einen Vektor $\mathbf{r}'$ um mit den Komponenten

$$\begin{cases} r_1' = A_{11}r_1 + A_{12}r_2 + A_{13}r_3 \\ r_2' = A_{21}r_1 + A_{22}r_2 + A_{23}r_3 \\ r_3' = A_{31}r_1 + A_{32}r_2 + A_{33}r_3. \end{cases} \tag{257}$$

Ihre Wirkung läßt sich kurz angeben durch die Tabelle

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}. \end{matrix}$$

Die Situationsänderung des Endpunktes des allgemeinen Vektors entspricht also einer affinen Transformation des Raumes, und jede Dyade ist demnach einer solchen Transformation eindeutig zugeordnet. Da ein Affinor entweder als Vor- oder als Nachfaktor und entweder mit $\lfloor\!\times$ oder mit $\overline{\times}\!\rceil$ eine Dyade ergeben kann, entsprechen jedem Affinor $\mathbf{A}$ vier affine Transformationen: $\mathbf{A}\,\lfloor\!\times$, $\mathbf{A}\,\overline{\times}\!\rceil$, $\mathbf{A}\,\underline{\times}\!\rfloor$, $\mathbf{A}\,\lceil\!\times$.

Soll es bei der affinen Transformation

$$\mathbf{A}\,\lfloor\!\times$$

einen Vektor $\mathbf{r}$ geben, der seine Richtung beibehält, so muß

$$\begin{cases} & \mathbf{A}\mathbf{r} = A\mathbf{r}, \\ \text{und also} & \\ & \left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha}A\right)\mathbf{r} = 0 \end{cases} \tag{258}$$

sein, oder, in Koordinaten:

---

1) 12.2, S. 280.

$$(259)\qquad \begin{cases} A r_1 = A_{11} r_1 + A_{12} r_2 + A_{13} r_3 \\ A r_2 = A_{21} r_1 + A_{22} r_2 + A_{23} r_3 \\ A r_3 = A_{31} r_1 + A_{32} r_2 + A_{33} r_3, \end{cases}$$

wo A eine gewöhnliche Zahl ist. Diese Gleichungen sind nur dann nach den r auflösbar, wenn ihre Determinante verschwindet:

$$(260)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} - A & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - A & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - A \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine Gleichung dritten Grades in A, die entweder eine oder drei reelle Wurzeln hat. Die Wurzeln bestimmen jede eine unveränderliche Richtung. Im ersten Falle können zwei derselben oder auch alle drei zusammenfallen, im zweiten Falle sind zwei der Richtungen komplex. Jedenfalls ergibt aber der Affinor

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha} A_1\right)\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha} A_2\right)\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha} A_3\right),$$

der zwei komplexe Faktoren enthalten kann, mit jedem beliebigen Vektor vektoraffinorisch multipliziert Null und ist also selbst Null:

$$(261)\qquad \left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha} A_1\right)\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha} A_2\right)\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha} A_3\right) = 0.$$ [1]

In dieser Gleichung ist die Summe der drei Wurzeln A_1, A_2 und A_3, wie aus (260) hervorgeht, gleich der Summe der Hauptminoren erster Ordnung der Determinante

$$(262)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

also gleich dem ersten Skalar oder kurz Skalar von $\mathbf{A}$:

$$(263)\qquad A_1 + A_2 + A_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \mathrm{S}\mathbf{A} = A_s.$$

Ebenso ist die Summe der zweifaktorigen Produkte der Wurzeln gleich

1) Sind die Wurzeln A_1, A_2 und A_3 und demnach die drei unveränderlichen Richtungen verschieden, so ist die Gleichung (261) unmittelbar evident. Aber auch bei gleichen Wurzeln bleibt sie gültig, wie in der Theorie der Matrizen, Cayley 58.1, Sylvester 84.3, Taber 90.1, Whitehead, 98.1, S. 248, der Theorie der linearen Substitutionen, Frobenius 78.2, sowie in der allgemeinen Theorie der assoziativen Zahlensysteme (Vgl. 14.1, S. $x+41$ ff.) mannigfach bewiesen ist. Ein sehr einfacher Beweis ergibt sich, wenn man den Affinor in der ersten Normalform schreibt (vgl. S. 129). Die Gleichung ist für ursprüngliche Systeme beliebiger Ordnung zuerst aufgestellt von Cayley, 58.1. Er nannte sie „identical equation". Sie wird jetzt wohl meist die charakteristische Gleichung des Zahlensystems genannt (Vgl. 14.1, S. $x+18$).

der Summe der Hauptminoren zweiter Ordnung. Diese Summe wollen wir den zweiten Skalar von **A** nennen:

$$(264)\qquad A_2A_3 + A_3A_1 + A_1A_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \text{cycl.} = S_2\mathbf{A} = A_{s2}.$$

Schließlich ist das dreifaktorige Produkt der Wurzeln gleich der Determinante selbst, die wir fortan als dritten Skalar des Affinors **A** ansprechen:

$$(265)\qquad A_1A_2A_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = S_3\mathbf{A} = A_{s3}.$$

Die charakteristische Gleichung (261) läßt sich also schreiben:

$$(266)\qquad \mathbf{A}^{3\urcorner} - A_s\mathbf{A}^{2\urcorner} + A_{s2}\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha}A_{s3} = 0.$$

Klassifizierung der Affinoren. Hat die Gleichung (260) drei verschiedene Wurzeln, und sind **a**, **b** und **c** drei beliebig große Vektoren in den drei unveränderlichen Richtungen von $\mathbf{A}\lfloor\times$, so läßt sich der Affinor **A** offenbar wie folgt darstellen:

$$(267)\qquad \mathbf{A} = A_1\mathbf{a}\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} + A_2\mathbf{b}\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} + A_3\mathbf{c}\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}.$$

Nennt man mit Gibbs $\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}$, cycl., die zu **a**, **b** und **c** reziproken Vektoren, und bezeichnet man sie kurz mit $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ und $\mathbf{c}'$, so ist also die allgemeine Form des Affinors mit drei verschiedenen unveränderlichen Richtungen:

$$(268)\qquad \mathbf{A} = A_1\mathbf{a}\mathbf{a}' + A_2\mathbf{b}\mathbf{b}' + A_3\mathbf{c}\mathbf{c}'.$$ [1]

Wir wollen diese Form die erste Normalform des Affinors nennen.

Sind die unveränderlichen Richtungen alle reell, so kommt die Transformation einer nach drei Richtungen verschieden starken Längenänderung gleich.[2] Sind zwei der Richtungen komplex, so bleibt die durch diese Richtungen bestimmte reelle Ebene bei der Transformation unverändert. Die in ihr enthaltenen reellen Richtungen wechseln aber alle ihren Ort.[3] Ein Spezialfall dieser Transformation ist die Drehung um eine Achse, die Ebene der komplexen unveränderlichen Richtungen steht dann senkrecht auf der reellen unveränderlichen Richtung (vgl. S. 147).

---

1) Die Zahlen $\mathbf{a}\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}\mathbf{c}'$ bilden eine Hauptreihe des Systems in $\urcorner$ (vgl. S. 17), und umgekehrt läßt sich jede Hauptreihe des Systems in diese Form bringen.

2) Gibbs nannte den Affinor in diesem Falle ein „tonic".

3) Gibbs nannte den Affinor in diesem Falle ein „cyclotonic".

Hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln $A_2 = A_3$, so kann keine Wurzel komplex sein, und es ergeben sich zwei Möglichkeiten. Entweder macht A_2 auch alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung von (260) zu Null oder nicht. Im ersten Falle sind die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} (A_{11} - A_2)r_1 + A_{12}r_2 + A_{13}r_3 \\ A_{21}r_1 + (A_{22} - A_2)r_2 + A_{23}r_3, \end{cases}$$

die die zu A_2 gehörige unveränderliche Richtung bestimmen, von einander abhängig. Alle Linien der durch sie bestimmten Ebene sind also unveränderlich, und der Affinor läßt sich auf unendlich viele Weisen angeben als:

$$\text{(269)} \qquad \mathbf{A} = A_1\mathbf{aa}' + A_2(\mathbf{bb}' + \mathbf{cc}'),$$

wo $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zwei beliebige Vektoren in dieser Ebene, $\mathbf{a}$ ein Vektor in der zu A_1 gehörigen Richtung, und $A_1\mathbf{a}$, $A_2\mathbf{b}$ und $A_2\mathbf{c}$ die aus $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ durch die Transformation entstehenden Vektoren sind. Offenbar ist in diesem Falle

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha} A_1\right)\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha} A_2\right) = 0$$

die charakteristische Gleichung also zweiten Grades. Die Transformation $\mathbf{A} \llcorner \mathbf{x}$ ist eine Längenänderung in der Richtung von $\mathbf{a}$, verbunden mit einer nach allen Seiten spezifisch gleichen Längenänderung in der diese Richtung nicht enthaltenden Ebene von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$, also ein Spezialfall von (268).

Im zweiten Falle bestimmt A_2 eine einzige unveränderliche Richtung, die charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$ bleibt dritten Grades:

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha} A_1\right)\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha} A_2\right)\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\alpha} A_2\right) = 0,$$

und es läßt sich zeigen, daß der Affinor sich schreiben läßt als:

$$\text{(270a)} \qquad \mathbf{A} = A_1\mathbf{aa}' + A_2(\mathbf{bb}' + \mathbf{cc}') + p\mathbf{bc}'.$$ [1])

Die Transformation ist eine Längenänderung in den Richtungen von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, die zugleich den Vektor $\mathbf{c}$ umsetzt in $A_2\mathbf{c} + p\mathbf{b}$, also erstens seine Länge im selben Maß wie $\mathbf{b}$ ändert, und dann seinen Endpunkt parallel zu $\mathbf{b}$ verschiebt.[2]) Da die Vektoren $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}' + q\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}'$, wo q eine beliebige gewöhnliche Zahl ist, offenbar reziprok zu $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} - q\mathbf{b}$ sind, und $\mathbf{A}$ in der Form:

$$\text{(270b)} \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \Big\{A_1\mathbf{aa}' + (A_2 + p\delta)\mathbf{b}\left(\mathbf{b}' + \frac{1}{2\delta}\mathbf{c}'\right) \\ \qquad\qquad + (A_2 - p\delta)\left(\mathbf{c} - \frac{1}{2\delta}\mathbf{b}\right)\mathbf{c}'\Big\}_{\mathrm{Lim}\ \delta = 0} \end{cases}$$

1) Vgl. z. B. Wilson 01. 2 S. 356 u. f.

2) Gibbs nannte den Affinor in diesem Falle ein „simple shearer".

geschrieben werden kann, kann man dem Affinor $\mathbf{A}$ mit einem in Normalform geschriebenen Affinor so nahe kommen, wie man will. Es ist die Form (270) also als ein Grenzfall der ersten Normalform (268) zu betrachten.

Hat die Gleichung (260) drei gleiche Wurzeln A_1, so ergeben sich drei Möglichkeiten. Entweder macht A_1 alle Unterdeterminanten erster und zweiter Ordnung zu Null, oder nur alle zweiter Ordnung, oder auch letztere nicht.

Im ersten Falle sind alle Richtungen unveränderlich, $\mathbf{A}$ läßt sich schreiben als

$$\mathbf{A} = A_1(\mathbf{a}\mathbf{a}' + \mathbf{b}\mathbf{b}' + \mathbf{c}\mathbf{c}') = \frac{1}{\alpha} A_1, \tag{271}$$

ist also eine gewöhnliche Zahl. Die charakteristische Gleichung ist ersten Grades. Die Dyade $\mathbf{A}\lfloor^{\times}$ entspricht einer gleichmäßigen Längenänderung nach allen Richtungen, ein Spezialfall von (268).

Im zweiten Falle bestimmt A_1 eine Ebene mit nur unveränderlichen Richtungen, die charakteristische Gleichung ist zweiten Grades, und es läßt sich zeigen, daß $\mathbf{A}$ geschrieben werden kann:

$$\mathbf{A} = A_1(\mathbf{a}\mathbf{a}' + \mathbf{b}\mathbf{b}' + \mathbf{c}\mathbf{c}') + p\mathbf{b}\mathbf{c}'. \tag{272}$$

Die Transformation entspricht einer nach allen Richtungen gleichmäßigen Längenänderung, gefolgt durch eine Verschiebung der Endpunkte aller Vektoren, die nicht in der Ebene $\mathbf{a}\mathbf{b}$ liegen, in der Richtung von $\mathbf{b}$, ein Spezialfall von (270), und also auch Grenzfall von (268).

Im dritten Falle bestimmt A_1 eine unveränderliche Richtung, die charakteristische Gleichung ist dritten Grades, und es läßt sich zeigen, daß $\mathbf{A}$ geschrieben werden kann:

$$\mathbf{A} = A_1(\mathbf{a}\mathbf{a}' + \mathbf{b}\mathbf{b}' + \mathbf{c}\mathbf{c}') + p_1\mathbf{a}\mathbf{b}' + p_2\mathbf{b}\mathbf{c}'. \tag{273}$$

Die Transformation entspricht einer gleichmäßigen Ausdehnung gefolgt durch zwei Verschiebungen der Endpunkte der Vektoren, die nicht in der Ebene $\mathbf{c}\mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{a}\mathbf{b}$ liegen.[1] In ähnlicher Weise wie auf S. 130 ist darzutun, daß die Form (273) ein Grenzfall der ersten Normalform (268) ist.

Jeder Affinor kann also, genau oder mit beliebiger Annäherung, in die erste Normalform gebracht werden.[2]

---

1) Gibbs nannte den Affinor in diesem Falle ein „complex Shearer".

2) Es ist dies ein Spezialfall eines allgemeinen Gesetzes, welches besagt, daß jede Zahl eines ursprünglichen Systems und also auch jede Zahl eines assoziativen Systems überhaupt, entweder genau oder mit beliebiger Annäherung, als Vielfachsumme von zu irgendeiner Hauptreihe gehörenden Einheiten geschrieben werden kann. Das Mittel der Koeffizienten dieser Einheiten ist der Tabersche Skalar der Zahl (vgl. 14. 1 S. $x + 61$).

Ist der Affinor $\mathbf{A}$ ein Tensor, so werden A_{v1}, A_{v2} und A_{v3} null, und:

$$A_{12} = A_{21}, \quad \text{cycl.}$$

Der Dyade $\mathbf{A}\lfloor\times$ entspricht dann die Transformation:

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{matrix}$$

und die Gleichung (260) hat jedenfalls drei reelle Wurzeln. Die durch diese gegebenen Richtungen stehen senkrecht aufeinander, und sind zugleich Hauptrichtungen der Richtungsfläche des Tensors:

$$(135) \qquad A_{11}x^2 + \text{cycl.} + 2A_{31}yz + \text{cycl.} = \pm 1,$$

deren Gleichung, affinoranalytisch geschrieben, lautet:

$$(274) \qquad \mathbf{r}\cdot(\mathbf{A}\mathbf{r}) = (\mathbf{r}\mathbf{A})\cdot\mathbf{r} = \mp 1.$$

Die Gleichung (268) geht über in:

$$(275) \qquad \mathbf{A} = -A_1\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0 - A_2\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0 - A_3\mathbf{c}_0\mathbf{c}_0,$$

wo $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{c}_0$ drei unter sich senkrechte Einheitsvektoren sind, die offenbar ihren Reziproken dem Betrage nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind.

Die zweite Normalform eines Affinors. Bekanntlich existieren zu jeder affinen Transformation drei unter sich senkrechte Richtungen, die bei der Transformation senkrecht bleiben.[1]) Sind die Einheitsvektoren in diesen Richtungen vor und nach der Transformation $\mathbf{A}\lfloor\times$:

$$\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a}_0', \mathbf{b}_0', \mathbf{c}_0',$$

die beide ein Rechtssystem bilden mögen, so kann man den Affinor $\mathbf{A}$ also schreiben:

$$(276) \qquad \mathbf{A} = -A_{\mathrm{I}}\mathbf{a}_0'\mathbf{a}_0 - A_{\mathrm{II}}\mathbf{b}_0'\mathbf{b}_0 - A_{\mathrm{III}}\mathbf{c}_0'\mathbf{c}_0,$$

wobei eine oder zwei der Koeffizienten null werden können. Man kann es so einrichten, daß die nicht null werdenden stets entweder alle positiv oder alle negativ werden. Denn hat z. B. A_{I} ein anderes Zeichen als A_{II} und A_{III}, so kehre man $\mathbf{b}_0$ und $\mathbf{c}_0$ um, das System $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{c}_0$ bleibt dabei Rechtssystem. Da nach (276) $\mathbf{a}_0$ durch die Transformation $\mathbf{A}\lfloor\times$ in $A_1\mathbf{a}_0'$ übergeht usw., gibt es also zu jeder Dyade ein rechtwinkliges Rechtssystem, das entweder in ein Rechts- oder in ein Linkssystem übergeht. Jeder Affinor läßt sich demnach angeben als:

1) Vgl. z. B. Wilson 01.2, S. 302f.

(276) $$\mathbf{A} = -A_{\mathrm{I}}\mathfrak{a}_0'\mathfrak{a}_0 - A_{\mathrm{II}}\mathfrak{b}_0'\mathfrak{b}_0 - A_{\mathrm{III}}\mathfrak{c}_0'\mathfrak{c}_0,$$

wo $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{a}_0', \mathfrak{b}_0', \mathfrak{c}_0'$ rechtwinklige Rechtssysteme von Einheitsvektoren, und A_{I}, A_{II} und A_{III} entweder alle + oder alle — sind. Diese Form wollen wir die zweite Normalform nennen. Die Koeffizienten A_{I}, A_{II} und A_{III} sind nicht gleich A_1, A_2 bzw. A_3, wohl aber ist:

(277) $$A_{\mathrm{I}} A_{\mathrm{II}} A_{\mathrm{III}} = A_1 A_2 A_3 = S_3 \mathbf{A}.$$

Die sechs Richtungen von $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{a}_0', \mathfrak{b}_0', \mathfrak{c}_0'$ heißen die Hauptrichtungen des Affinors $\mathbf{A}$ und der Dyaden $\mathbf{A}\underline{\llcorner \times}$ und $\mathbf{A}\underline{\times \lrcorner}$. Im allgemeinen sind sie eindeutig bestimmt, nur in Spezialfällen nicht. Reduziert sich der Affinor z. B. zu einem Vektor, so kann man für $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0$ alle rechtwinkligen Rechtssysteme nehmen, bei denen der Vektor in einer der Richtungen liegt. Reduziert er sich zu einem Skalar, so genügt offenbar jedes Rechtssystem. Ist der Affinor ein Tensor, so fallen die Systeme $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{a}_0', \mathfrak{b}_0', \mathfrak{c}_0'$ zusammen, und die zweite Normalform (276) wird mit der ersten:

(275) $$\mathbf{A} = -A_1\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_0 - A_2\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_0 - A_3\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_0$$

identisch. Ein Tensor hat also nur drei Hauptrichtungen, die zugleich seine unveränderlichen Richtungen sind.

Die Produkte von Dyaden. Die affinen Transformationen bilden eine Gruppe, d. h. zwei nacheinander wirkende sind durch eine einzige zu ersetzen. Dieses Gesetz findet seinen Ausdruck in der schon S. 113 abgeleiteten Formel:

(235) $$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathfrak{c}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathfrak{c} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathfrak{c} \\ (\mathfrak{a}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathfrak{a}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = \mathfrak{a}\mathbf{B}\mathbf{C}. \end{cases}$$

Die Dyade, die zwei nacheinander wirkende Dyaden ersetzt, nennen wir ihr Produkt. Wir können dann die Regel aussprechen:

Regel: Der obere Affinor eines Produktes zweier Dyaden ist das affinorische Produkt der oberen Affinoren der Faktoren.

Ein so einfaches Gesetz besteht nicht für die unteren Affinoren, und die Normalform einer Dyade:

$$\mathbf{A}\underline{\llcorner \times}$$

gewinnt dadurch einen besonderen Vorzug der Form:

$$\mathbf{A}\overline{\times \urcorner}$$

gegenüber.

Bei Hamilton, der nur assoziative Multiplikationen kennt, ergibt sich das Produkt von Dyaden von selbst aus der Formel:

$$\varphi \psi \mathfrak{g}.$$

Da sowohl φ wie ψ Operatoren sind und also das Multiplikationszeichen schon mit einschließen, sind weitere Zeichen überflüssig.

Bei Gibbs entsteht das Produkt durch die Assoziationsänderung:

$$\Phi \cdot (\Psi \cdot \mathbf{a}) = (\Phi \cdot \Psi) \cdot \mathbf{a} = \Phi \cdot \Psi \cdot \mathbf{a},$$

wobei jetzt auch die affinorische Multiplikation von Affinoren unter sich mit der skalaren Multiplikation identifiziert wird. Bei Burali Forti und Marcolongo erübrigt sich wie bei Hamilton das Multiplikationszeichen.

Die Produkte von Operatoren überhaupt. Der Begriff des Produktes erhält durch die Multiplikation von Operatoren eine Erweiterung. Sind im allgemeinen zwei Operatoren $\Phi \overset{1}{\multimap}$ und $\Psi \overset{2}{\multimap}$ gegeben, wo $\overset{1}{\multimap}$ und $\overset{2}{\multimap}$ beliebige Multiplikationen andeuten mögen, so kann man das Produkt definieren als den Operator $\Omega \overset{3}{\multimap}$, für den, bei Anwendung auf jede beliebige Größe Λ des Systems, gilt:

$$\Phi \overset{1}{\multimap} (\Psi \overset{2}{\multimap} \Lambda) = \Omega \overset{3}{\multimap} \Lambda,$$

und demnach schreiben:

$$\Phi \overset{1}{\multimap} \Psi \overset{2}{\multimap} = \Omega \overset{3}{\multimap}.$$

Nun ist aber ein solcher Operator nur in Spezialfällen vorhanden, wie, wenn $\overset{1}{\multimap} = \overset{2}{\multimap} = \urcorner$ und Φ, Ψ und Λ Affinoren sind, oder wenn $\overset{1}{\multimap} = \overset{2}{\multimap} = \llcorner^{\times}$, Φ und Ψ Affinoren sind und Λ ein Vektor. Im allgemeinen läßt sich der Operator nicht angeben, und die Gleichung

$$\Phi \overset{1}{\multimap} \Psi \overset{2}{\multimap} = \Omega \overset{3}{\multimap}$$

wäre dann nur als Definition einer neuen Art Operatoren zu betrachten, die sich nicht in eine Größe und eine Multiplikation, die beide bekannter Art sind, zerlegen läßt. Da solche Definitionen eine Vergrößerung des Zeichenbestandes der Analysis fordern, sind sie mit Vorsicht zu verwenden. Es empfiehlt sich vielmehr, nur dort Produkte von Operatoren zu gebrauchen, wo diese schon tatsächlich im System existieren.

Andere Produkte von Operatoren, die nicht wirklich das Nacheinanderwirken der Faktoren ersetzen, sind überhaupt zu verwerfen. Definiert man z. B. als das $\overset{3}{\multimap}$ Produkt von $A \overset{1}{\multimap}$ und $\mathfrak{b} \overset{2}{\multimap}$:

$$(\Phi \overset{1}{\multimap}) \overset{3}{\multimap} (\Psi \overset{2}{\multimap}) = (\Phi \overset{4}{\multimap} \Psi) \overset{5}{\multimap},$$

oder auch:

$$= (\Phi \overset{4}{\multimap} \Psi),$$

so ist dies dem distributiven Gesetz nach ja allerdings möglich, wir haben in Wirklichkeit aber mit einem Produkt der Größen Φ und Ψ mit oder ohne beigefügter Multiplikation zu tun, dessen Auffassung als Produkt von $\Phi \xrightarrow{1} \circ$ und $\Psi \xrightarrow{2} \circ$ nur Verwirrung stiften kann.

Der Reziproke eines Affinors und der Einheitsaffinor I. Führt eine Dyade A $\lfloor^{\times}$ einen Satz von drei nicht komplanaren Vektoren wieder in nicht komplanare über, so gilt dasselbe offenbar für jeden solchen Satz. Es gibt dann keinen Vektor, der durch die Wirkung der Dyade zu Null gemacht wird. Der zugehörige obere Affinor **A** kann dann in $\urcorner$ kein Teiler der Null sein, denn wäre z. B.:

$$\begin{cases} \mathbf{AB} = 0 \\ \mathbf{B} \neq 0, \end{cases}$$

so gäbe es sicher irgendeinen Vektor **c**, so daß:

$$\begin{cases} \mathbf{ABc} = 0 \\ \mathbf{Bc} \neq 0 \end{cases}$$

wäre, der Vektor **Bc** würde also von **A** zu Null gemacht werden.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß **A** kein Teiler der Null in $\urcorner$ ist, lautet:

$$S_3\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Denn nur in dem Falle macht die Transformation

$$(257)\qquad \begin{cases} r_1' = A_{11} r_1 + A_{12} r_2 + A_{13} r_3 \\ r_2' = A_{21} r_1 + A_{22} r_2 + A_{23} r_3 \\ r_3' = A_{31} r_1 + A_{32} r_2 + A_{33} r_3 \end{cases}$$

niemals einen Vektor zu Null und gestattet sie die Umkehrung:

$$(278)\qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{A'_{11}}{A_{\alpha\beta}} r_1' + \dfrac{A'_{21}}{A_{\alpha\beta}} r_2' + \dfrac{A'_{31}}{A_{\alpha\beta}} r_3' \\[2ex] r_2 = \dfrac{A'_{12}}{A_{\alpha\beta}} r_1' + \dfrac{A'_{22}}{A_{\alpha\beta}} r_2' + \dfrac{A'_{32}}{A_{\alpha\beta}} r_3' \\[2ex] r_3 = \dfrac{A'_{13}}{A_{\alpha\beta}} r_1' + \dfrac{A'_{23}}{A_{\alpha\beta}} r_2' + \dfrac{A'_{33}}{A_{\alpha\beta}} r_3', \end{cases}$$

wo A'_{ij} der zu A_{ij} gehörige Minor der Determinante (262) (vgl. S. 19f.).

Nennen wir den Affinor mit den Koeffizienten $\dfrac{A'_{ij}}{A_{\alpha\beta}}$ den Reziproken von **A**, und bezeichnen wir ihn mit $\mathbf{A}^{-1}$, so lautet, wenn:

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{c} \qquad \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}$$

bzw.:

$$\mathbf{b}\mathbf{A} = \mathbf{c} \qquad \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{C}$$

ist, die Umkehrung:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{A}\urcorner} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{A}\urcorner} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$$

bzw.:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}}{\urcorner\mathbf{A}} = \mathbf{c}\mathbf{A}^{-1} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{C}}{\urcorner\mathbf{A}} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}.$$

Ist $\mathbf{A}$ kein Teiler der Null, so folgen sowohl aus:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{C}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{c}$$

als aus:

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{b}\mathbf{A} = \mathbf{c}\mathbf{A}$$

die Gleichungen:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{c}.$$

Offenbar ist:

$$(279) \begin{cases} \text{(a)} & (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \\ \text{(b)} & \mathbf{A}_{s3} = \dfrac{1}{(\mathbf{A}^{-1})_{s3}} \\ \text{(c)} & (\mathbf{A}_k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})_k = \mathbf{A}_k^{-1} \\ \text{(d)} & (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ \text{(e)} & (\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n = \mathbf{A}^{-n}. \end{cases}$$

Aus der Bedeutung des Reziproken ergibt sich:

$$(280) \qquad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B},$$

wo $\mathbf{A}$ einen beliebigen Affinor bezeichnet, der nicht Teiler der Null ist. Der Affinor

$$(281) \qquad \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$$

gibt also, vektordyadisch mit Vektoren oder affinorisch mit Affinoren multipliziert, dasselbe Resultat wie die Zahl 1 in skalarer Multiplikation, ist also eine als Affinor aufgefaßte Zahl. Wir wollen die Größe dieser Zahl bestimmen. Da nach der Bedeutung von $\llcorner$ und $\urcorner$ (S. 93):

$$(282) \qquad \begin{aligned} \mathbf{I} \llcorner^{\times} \mathbf{a} &= \beta\mathbf{I} \llcorner\!\times\!\lrcorner\, \mathbf{a} = \alpha\mathbf{I} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{I} \urcorner \mathbf{A} &= \beta^2\mathbf{I} \urcorner \mathbf{A} = \alpha\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

ist, so ist

$$(283) \qquad \mathbf{I} = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{3}.$$

Wir wollen die als Affinor aufgefaßte Zahl $\sqrt{3}$ den Einheitsaffinor

nennen, und für ihn das Zeichen **I** beibehalten. Die Gleichung (261) läßt sich dann schreiben:

$$(261') \qquad (\mathbf{A} - A_1\mathbf{I})(\mathbf{A} - A_2\mathbf{I})(\mathbf{A} - A_3\mathbf{I}) = 0$$

und (125):

$$(125') \qquad \begin{cases} \mathbf{A}_c = A_s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2}A_s\mathbf{I} - \mathbf{A}. \end{cases}$$

Sind $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ die reziproken Vektoren zu **a**, **b**, **c**, so ist offenbar

$$(284) \qquad \mathbf{I} = \mathbf{a}\mathbf{a}' + \mathbf{b}\mathbf{b}' + \mathbf{c}\mathbf{c}',$$

also im Spezialfalle von zueinander senkrechten Einheitsvektoren:

$$(285) \qquad \mathbf{I} = -\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_0\mathbf{c}_0 \text{ (vgl. S. 132).}$$

Auch aus diesen Gleichungen folgt leicht:

$$(283) \qquad J = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{3}.$$

Daß die als Affinor aufgefaßte Zahl $\sqrt{3}$ mit der affinorischen bzw. vektordyadischen Multiplikation dieselbe Wirkung hervorbringt, wie die gewöhnliche Zahl 1 skalar multipliziert, hat an sich nichts Wunderliches, da wir ja prinzipiell als Multiplikation jede Verknüpfung ansehen dürfen, die distributiv in bezug auf die Addition ist. Es ist also sowohl $\cdot$ als $\mathbin{\bar{\cdot}}$ als $n\,\cdot$, wo n eine beliebige gewöhnliche Zahl ist, eine Multiplikation in unserem Sinne, und da wir gewöhnliche Zahlen mit den Zahlen des Systems in **k** identifiziert haben, kann es auch für solche Zahlen noch andere Multiplikationen geben als die skalare. Eine Gleichung wie:

$$3 \mathbin{\bar{\cdot}} 5 = 3 \cdot 5\alpha = 15\alpha$$

will ja nichts anderes sagen, als daß die Funktion

$$3 \cdot 5\alpha$$

der Zahlen 3 und 5, wo α eine gegebene Konstante ist, distributiv ist, und demnach als Multiplikation aufgefaßt und mit einem eigenen Zeichen versehen werden darf.

In derselben Weise wie **I**, skalar mit einer Zahl a multipliziert, den Affinor erzeugt, dessen untere Dyade dieselbe Wirkung hat wie die Zahl a mit der skalaren Multiplikation, ergibt **I**, affinorisch mit einem Vektor **a** multipliziert, einen Affinor, dessen untere Dyade dieselbe Wirkung hat, wie $\mathbf{a} \times$ auf Vektoren angewandt:

$$(286) \qquad (\mathbf{I} \urcorner \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \qquad \text{(nach (239)).}$$

Die Dyade $\mathbf{A} \llcorner^{\times}$ läßt sich also folgendermaßen angeben:

$$
(287)\quad \begin{cases} \mathbf{A} \llcorner^{\!\times} = \frac{1}{3} A_s \cdot + \frac{1}{2} \mathbf{A}_v \times + \mathbf{A}_d \mathsf{X} \\ \quad = \{ \frac{1}{3} A_s \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{A}_v \urcorner \mathbf{I} + \mathbf{A}_d \} \llcorner^{\!\times} \\ \quad = \{ \mathbf{I} \urcorner (\frac{1}{3} A_s + \frac{1}{2} \mathbf{A}_v) + \mathbf{I} \urcorner \mathbf{A}_d \} \llcorner^{\!\times} \text{ (nach (150) u. (286)).} \end{cases}
$$

Der Affinor **I**, der bei Gibbs „Idemfaktor“ heißt, wurde von ihm nicht mit einer Zahl identifiziert. Bei Hamilton, sowie bei Burali Forti und Marcolongo, die nur mit Operatoren arbeiten, erscheint das Produkt eines Operators und seines Reziproken naturgemäß als eine (als Operator gefaßte) gewöhnliche Zahl. Es ist:

$$\mathbf{A} \llcorner^{\!\times} (\mathbf{A}^{-1} \llcorner^{\!\times} \mathfrak{b}) = 1 \cdot \mathfrak{b}$$

und also:

$$\mathbf{A} \llcorner^{\!\times} \mathbf{A}^{-1} \llcorner^{\!\times} = 1 \cdot,$$

auf Vektoren angewandt. Da die Multiplikation mit einer Zahl bei diesen Autoren kein Multiplikationszeichen hat, und bei ihnen auch die Zeichen φ und φ^{-1} selbst schon die Operatoren darstellen, schreiben sie

$$\varphi \varphi^{-1} = 1.$$

Der Unterschied zwischen einer gewöhnlichen Zahl als Größe, z. B. fünf, und der mit dieser Zahl verbundenen Operation, fünfmal, der doch schon in der Sprache seine adäquate Bezeichnung findet, wird durch diese Notation verwischt.[1]) Es ist also namentlich in einer Analysis, die neben Operatoren auch Größen zweiter Ordnung kennt, direkt geboten, auch in der Bezeichnung prinzipiell zwischen Größen und Operatoren zu unterscheiden.

Gegen die Identifizierung von $\mathbf{J} \llcorner^{\!\times}$ und 1 bei Burali Forti und Marcolongo hat Wilson Einspruch erhoben. Er schreibt:

„From the algebraic or matricular point of view which they almost wholly ignore, the quantity α is an element of a quadrate algebra containing nine units and having a modulus (often called the idemfactor), but the unit 1 is not one of the units as it is in the case of the ordinary complex numbers or in the case of quaternions, and the idemfactor, which in those cases is 1, is not 1 in the algebra of homographies α because 1 is not an element of the system.“[2])

---

1) Burali Forti und Marcolongo sind sich der Unrichtigkeit dieser Schreibweise bewußt (12. 3 S. 5), ändern sie aber doch nicht. Da ihre Homographien nur Operatoren sind, und sie keine Größen höherer als erster Ordnung kennen, werden sie zu einem solchen Kompromiß gezwungen, während wir, im Besitze richtiger Größen höherer Ordnung, einen Skalar auffassen können als Spezialfall eines Affinors, und so imstande sind, jede Ungenauigkeit in der Schreibweise zu vermeiden.

2) 10.7, S. 429.

Nun berührt diese Kritik Burali Forti und Marcolongo nur, insofern sie gegen den ausschließlich operatorischen Gesichtspunkt dieser Autoren Stellung nimmt. Ist dieser Gesichtspunkt aber einmal gewählt, und existieren demnach im System nur Operatoren, so ist gegen die Identifikation nichts zu sagen, da ja offenbar, auch für Wilson

$$\mathbf{I} \llcorner^{\times} = 1\cdot$$

ist. Gegen ein System, das sowohl Größen als Operatoren kennt und doch identifiziert, ist die Kritik aber vollkommen berechtigt, da, wie wir im ersten und zweiten Kapitel schon bemerkten, der Modulus eines höheren Zahlensystems absolut nicht ohne weiteres mit der Zahl 1 identisch ist. Dies gilt aber nicht nur für das System zweiter, sondern auch für das System erster Ordnung, die Vektoranalysis, zwar nicht, wenn diese Analysis wie bisher einfach, die Zahl 1 enthaltend, gegeben wird, ohne nähere Begründung, sondern, wenn wir das Prinzip der Klassifizierung nach der rotationalen Orientierungsweise zugrunde legen, wodurch sich die Systeme aller Ordnungen in einer geordneten Reihe entwickeln lassen, wie es hier geschehen ist. Da diese ganze Reihe nur eine Art Skalare enthält, können wir nun statt mit gewöhnlichen Zahlen mit diesen Skalaren arbeiten, d. h. also, jede gewöhnliche Zahl als Skalar der Systeme auffassen, oder wir können den Unterschied aufrecht halten. Tun wir aber das erste, was einer ausdrücklichen Festsetzung bedarf, wodurch sich aber die Rechnung viel einfacher gestaltet, so gilt die Identifizierung für alle Systeme, nicht nur z. B. für das erster Ordnung, da es ja eben nur die eine Art Skalare für alle Systeme gibt. Da die Multiplikation $\llcorner^{\times}$ eine andere ist als $\cdot$, wird dabei $\mathbf{I}$ gleich $\sqrt{3}$ und nicht wie bei Hamilton, Burali Forti und Marcolongo gleich 1.

Die Funktion B **und die drei Skalare.** Aus der Gleichung:

$$\mathrm{A}^{3\urcorner} - A_s \mathrm{A}^{2\urcorner} + A_{s2}\mathrm{A} - A_{s3}\mathbf{I} = 0 \tag{266}$$

folgt, wenn $A_{s3} \neq 0$:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{\mathrm{A}^{2\urcorner} - A_s\mathrm{A} + A_{s2}\mathbf{I}}{A_{s3}}. \tag{288}$$

Ist $A_{s3} = 0$ und A demnach ein Teiler der Null, so wird A^{-1} unendlich; der Affinor:

$$A_{s3}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{2\urcorner} - A_s\mathrm{A} + A_{s2}\mathbf{I}, \tag{289}$$

der offenbar die Koeffizienten

$$\begin{matrix} A'_{11} & A'_{21} & A'_{31} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{32} \\ A'_{13} & A'_{23} & A'_{33} \end{matrix}$$

hat, bleibt aber endlich, und ist stets eine eindeutig bestimmte Funktion von $\mathbf{A}$.

Für diese Funktion wollen wir das Funktionszeichen B zusammen mit dem unteren Index $_b$ einführen. Es ist also:

(290) $$\mathbf{A}_b = \mathrm{B}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{2\urcorner} - A_s\mathbf{A} + A_{s2}\mathbf{I}.$$

Da aber:

$$\mathbf{A}^{2\urcorner} = \tfrac{1}{3}A_s \cdot \mathbf{A} + (\beta\mathbf{A}_v + \mathbf{A}_d)\mathbf{A}$$

$$-\mathbf{A}\mathbf{A}_c = -\mathbf{A}_c\mathbf{A} = -\tfrac{2}{3}A_s \cdot \mathbf{A} + (\beta\mathbf{A}_v + \mathbf{A}_d)\mathbf{A} = \mathbf{A}^{2\urcorner} - A_s\mathbf{A}$$

ist, folgt:

$$\mathrm{B}\mathbf{A} = -\mathbf{A}_c\mathbf{A} + A_{s2}\mathbf{I} = -\mathbf{A}\mathbf{A}_c + A_{s2}\mathbf{I}.$$

Da aus (264) hervorgeht:

(291) $$\mathrm{S}_2\mathbf{A} = \mathrm{S}\mathbf{A}_b,$$

ist:

$$A_{s2} = -\mathbf{A}_c \boxdot \mathbf{A} + 3A_{s2}$$

$$A_{s2} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A}_c \boxdot \mathbf{A})$$

$$= \tfrac{1}{3}A_s \cdot A_s - \tfrac{1}{4}\mathbf{A}_v \cdot \mathbf{A}_v - \tfrac{1}{2}\mathbf{A}_d \cdot \mathbf{A}_d \qquad \text{(nach (246))}$$

und also:

(292) (a) $$\mathrm{B}\mathbf{A} = -(\mathbf{A}_c\mathbf{A}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{A}_c \boxdot \mathbf{A})\mathbf{I}$$

$$= (\mathbf{A}_c\mathbf{A})_o - (\mathbf{A}\mathbf{A}_c)_ɔ \qquad \text{(nach (125))}$$

(b) $$\mathrm{S}_2\mathbf{A} = \mathrm{S}(\mathbf{A}\mathbf{A}_c)_o = \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\mathbf{A}\mathbf{A}_c \qquad \text{(nach (291))}.$$

Da ferner:

(293) $$\mathrm{B}\mathbf{A} = A_{s3}\mathbf{A}^{-1}$$

ist, so folgt:

$$A_{s3}\mathbf{I}_3 = \mathbf{A}\mathrm{B}\mathbf{A}$$

$$= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{A}_c)_o$$

$$A_{s3} = \tfrac{1}{3}\mathbf{A} \boxdot (\mathbf{A}\mathbf{A}_c)_ɔ$$

Da aber offenbar allgemein:

$$\mathbf{A} \boxdot \mathbf{B}_ɔ = \mathbf{A}_ɔ \boxdot \mathbf{B}$$

ist, ergibt sich für den dritten Skalar eines Affinors die Formel:

(294) $$A_{s3} = \tfrac{1}{3}\mathrm{S}\mathbf{A}_ɔ\mathbf{A}\mathbf{A}_c.$$

Für den zweiten und dritten Skalar eines Affinors ergeben sich also, bei Anwendung der Funktionen C und Ɔ die sehr einfachen Beziehungen:

(292b) $$\mathrm{S}_2\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\mathbf{A}\mathbf{A}_c$$

(294) $$\mathrm{S}_3\mathbf{A} = \tfrac{1}{3}\mathrm{S}\mathbf{A}_ɔ\mathbf{A}\mathbf{A}_c.$$

Offenbar gelten die Gleichungen:

(295) $$\mathrm{B}\mathrm{K}\mathbf{A} = \mathrm{K}\mathrm{B}\mathbf{A}$$

$$\text{(296)} \qquad \mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{A} = A_{s3}\mathbf{A}$$

$$\text{(297)} \qquad \mathbf{S}_2\mathbf{B}\mathbf{A} = A_{s3}^2$$

$$\text{(298)} \qquad \mathbf{B}p\mathbf{A} = p^2\mathbf{B}\mathbf{A}$$

$$\text{(299)} \qquad \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B} = (\mathbf{B}\mathbf{B})(\mathbf{B}\mathbf{A})$$

$$\text{(300)} \qquad \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{A_{s3}}\mathbf{A} = (\mathbf{A}_b)^{-1} = \mathbf{A}_b{}^{-1}$$

Ist ein Affinor in der ersten Normalform geschrieben:

$$\text{(268)} \qquad \mathbf{A} = A_1\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + A_2\mathfrak{b}\mathfrak{b}' + A_3\mathfrak{c}\mathfrak{c}',$$

so ist sein oberer bzw. unterer Affinor

$$\text{(301)} \qquad \begin{cases} \mathbf{A}_c = (A_2 + A_3)\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \text{cycl.} \\ \mathbf{A}_{ɔ} = \dfrac{A_2 + A_3 - A_1}{2}\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \text{cycl.}^{1)} \end{cases}$$

$\mathbf{B}\mathbf{A}$ ist demnach:

$$\text{(302)} \qquad \begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{A} = (\mathbf{A}\mathbf{A}_c)_{ɔ} = \dfrac{(A_3 + A_1)A_2 + (A_1 + A_2)A_3 - (A_2 + A_3)A_1}{2}\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \text{cycl.} \\ \qquad = A_2A_3\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + A_3A_1\mathfrak{b}\mathfrak{b}' + A_1A_2\mathfrak{c}\mathfrak{c}', \end{cases}$$

und $\mathbf{A}^{-1}$, falls existierend:

$$\text{(303)} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{A_1}\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \frac{1}{A_2}\mathfrak{b}\mathfrak{b}' + \frac{1}{A_3}\mathfrak{c}\mathfrak{c}'.$$

Ist der Affinor in der zweiten Normalform geschrieben:

$$\text{(276)} \qquad \mathbf{A} = -A_{\mathrm{I}}\mathfrak{a}_0'\mathfrak{a}_0 - A_{\mathrm{II}}\mathfrak{b}_0'\mathfrak{b}_0 - A_{\mathrm{III}}\mathfrak{c}_0'\mathfrak{c}_0,$$

so ist:

$$\text{(304)} \qquad \mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{A_{\mathrm{I}}}\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_0' - \frac{1}{A_{\mathrm{II}}}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_0' - \frac{1}{A_{\mathrm{III}}}\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_0',$$

und nach (277):

$$\text{(305)} \qquad \mathbf{B}\mathbf{A} = A_{s3}\mathbf{A}^{-1} = -A_{\mathrm{II}}A_{\mathrm{III}}\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_0' - \text{cycl.}$$

Aus (303) folgt eine wichtige geometrische Eigenschaft der Dyade $(\mathbf{K}\mathbf{A}_b)\llcorner^{\times}$. Bei einer affinen Transformation bleiben komplanare Vektoren komplanar. Ein Bivektor, d. i. ein mit Drehrichtung ausgestatteter Ebenenteil, geht also wieder in einen solchen Ebenenteil über. Vektoren stehen aber in dem System in $\mathfrak{i}$ sowohl für Strecken als für Bivektoren und man kann demnach nach der Dyade fragen, die der Transformation dieser Bivektoren entspricht. Diese ist nun aber gerade durch $(\mathbf{K}\mathbf{A}_b)\llcorner^{\times}$ gegeben. Denn da:

$$\mathbf{K}\mathbf{A}_b = -A_{\mathrm{II}}A_{\mathrm{III}}\mathfrak{a}_0'\mathfrak{a}_0 - \text{cycl.}$$

und:

$$\mathfrak{b}_0 \times \mathfrak{c}_0 = \mathfrak{a}_0, \quad \mathfrak{b}_0' \times \mathfrak{c}_0' = \mathfrak{a}_0', \quad \text{cycl.}$$

---

1) Aus diesen Gleichungen lassen sich (291) und (294) sehr leicht ableiten.

ist, geht ein Vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ durch die Transformation $(\mathrm{K}\mathbf{A}_b) \llcorner\!\times$ über in

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}) \times (\mathbf{A}\mathbf{v}).$$

Allgemein ist also:

$$(\mathbf{A}\mathbf{b}) \times (\mathbf{A}\mathbf{c}) = (\mathrm{K}\mathbf{A}_b)(\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \tag{306}$$

Die drei Skalare eines Affinors lassen sich noch in folgender Form schreiben:

$$\begin{cases} \mathrm{S}\mathbf{A} = \dfrac{(\mathbf{A}\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{A}\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + (\mathbf{A}\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} \\ \mathrm{S}_2\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\{(\mathbf{A}\mathbf{b})\times(\mathbf{A}\mathbf{c})\} + \mathbf{b}\cdot\{(\mathbf{A}\mathbf{c})\times(\mathbf{A}\mathbf{a})\} + \mathbf{c}\cdot\{(\mathbf{A}\mathbf{a})\times(\mathbf{A}\mathbf{b})\}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} \\ \mathrm{S}_3\mathbf{A} = \dfrac{(\mathbf{A}\mathbf{a})\cdot\{(\mathbf{A}\mathbf{b})\times(\mathbf{A}\mathbf{c})\}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \end{cases} \tag{307}$$

wo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ beliebige nicht komplanare Vektoren sind. Von diesen Formeln läßt sich die erste leicht aus der Normalform eines Affinors ableiten, die zweite ergibt sich dann direkt aus (244), (291) und (303), während die dritte unmittelbar evident ist.

Gibbs gelangte zu dem Affinor $\mathrm{K}\mathbf{A}_b$ durch Einführung einer neuen Verknüpfungsweise, der „double cross"-Multiplikation $\overset{\times}{\times}$, für welche gilt:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) \overset{\times}{\times} (\mathbf{c}\mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \times \mathbf{d}).$$

Es ist nun:

$$\mathbf{A} \overset{\times}{\times} \mathbf{A} = \mathrm{K}\mathbf{A}_b.$$

In der Affinoranalysis kann diese neue Multiplikation entbehrt werden, da $\mathrm{K}\mathbf{A}_b$ sich in einfacher Weise vermittels (292a) angeben läßt. Dieselbe ist kommutativ aber nicht assoziativ, hat Teiler der Null und ist keine Vielfachsumme der Grundmultiplikationen.[1])

Burali Forti und Marcolongo haben[2]) für den Übergang von $\mathbf{A} \llcorner\!\times$ zu $\mathrm{K}\mathbf{B}\mathbf{A} \llcorner\!\times$ das Funktionszeichen R eingeführt. Da $\mathbf{B}\mathbf{A}$ aber analytisch in einem einfacheren Zusammenhang mit $\mathbf{A}$ steht als $\mathrm{K}\mathbf{B}\mathbf{A}$, erteilen

---

1) Definiert man aber eine neue skalare Multiplikation $*$:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{i}_1 * \mathbf{i}_1 = -1 & 1 * \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{J}_1 * \mathbf{J}_1 = 1 & 1 * \mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_1 \\ 1 * 1 = -2 & 1 * \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1 \end{array}$$

die also in allem gleich $\cdot$ ist, nur bei Multiplikation zweier Skalare gleich $-2\,\cdot$, und setzt man:

$$\underset{*}{\lrcorner} = \alpha * + \beta \times + \chi$$

so ist:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) \overset{\times}{\times} (\mathbf{c}\mathbf{d}) = (\mathbf{b}\mathbf{a}) \underset{*}{\perp} (\mathbf{d}\mathbf{c}).$$

(Vgl. S. 80.)

2) 09.12, S. 24.

wir ersterer Funktion die einfachere Bezeichnung. Da die genannten Autoren ihre Analysis nur operatorisch und nicht als ein algebraisches System auffassen wollen, sind sie gezwungen, die drei Skalare gleich im Anfange ihres Systems folgendermaßen zu definieren:

$$(308) \quad \begin{cases} \mathrm{S}\mathbf{A} = \dfrac{(\mathbf{A}\mathbf{a})\cdot\{(\mathbf{A}\mathbf{b})\times(\mathbf{A}\mathbf{c})\}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} \\ \mathrm{S}_2\mathbf{A} = \left\{\dfrac{d}{dx}S_3(\mathbf{A}+x\mathbf{I})\right\}_{x=0} \\ \mathrm{S}_3\mathbf{A} = \left\{\dfrac{d^2}{dx^2}S_3(\mathbf{A}+x\mathbf{I})\right\}_{x=0} \end{cases}$$ [1]).

Diese Beziehungen ergeben sich von selbst aus der charakteristischen Gleichung des Systems, und können auch nur mit Rücksicht auf diese Gleichung aufgestellt sein. Hier gleich zu Anfang, und ohne nähere Begründung als Definition eingeführt, erscheinen die letzten zwei aber vollkommen willkürlich. Dieselbe Bemerkung gilt für die Verwendung der Gleichungen (307) zur Definition der drei Skalare, die bei den genannten Autoren in einer späteren Darstellung auftritt.[2])

Die Zerlegung eines Affinors in einen Skalar, einen Vektor und einen Deviator. Eine vollständige Zerlegung des Affinors findet in keinem der bisherigen Systeme statt. Wohl kennt Gibbs den Skalar A_s und den Vektor $\mathbf{A}_v$ eines Affinors, die er durch die unteren Indizes $_s$ bzw. $_\times$ angibt, er zerlegt sogar die Dyade $\mathbf{A}\lfloor\!\times$ in den selbstkonjugierten oder tensorischen Teil, der durch ein Akzent angegeben wird, und

$$-\tfrac{1}{2}\mathbf{A}_v \times$$ [3])[4])[5]).

Eine vollständige Zerlegung einer Dyade findet aber bei ihm nicht statt, eine Zerlegung des Affinors selbst nur insofern, als ein selbstkonjugierter Bestandteil

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}_k)$$

und ein antikonjugierter Bestandteil

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_k)$$

unterschieden wird, die aber nicht als Größen verschiedener Art betrachtet werden. Auch Jaumann geht in dieser Beziehung nicht weiter. Ein Fortschritt wurde erst erzielt, als Mehmke 1904[6]) im Anschluß an das alge-

1) 09.12, S. 6. Burali Forti und Marcolongo schreiben $\times$ statt $\cdot$, $\wedge$ statt $\times$, I statt S, α statt $\mathbf{A}$ und x statt $\mathbf{I}x$.

2) 12.3, S. 23.

3) 82.2, 06. 1, S. 63, siehe auch 01.2, S. 298.

4) Gibbs schreibt Φ statt $\mathbf{A}$, $_\times$ statt $_v$ und $_c$ statt $_k$.

5) Das — Zeichen rührt von der Voraussetzung $\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{i}_1 = +1$ her.

6) 04.2.

braische Produkt Graßmanns den Tensorteil des dyadischen Produktes als algebraisches Produkt definierte und den Affinor **ab** folgendermaßen zerlegte:

$$\mathbf{a},\mathbf{b} = \mathbf{ab} - \tfrac{1}{2}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \text{ [1]},$$

wo , das Zeichen der algebraischen Multiplikation, $\wedge$ das der äußeren Multiplikation Graßmanns ist, und wo die algebraische Multiplikation kein Zeichen hat. Diese Zerlegung fand ihre Begründung in der Formel

$$\mathbf{r}\,|\,(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{r}\,|\,(\mathbf{ab}) - \tfrac{1}{2}\mathbf{r}\,|\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}).$$

Jung hat 1908[2]) dieselbe Zerlegung auch auf das Differential eines Feldvektors angewandt. Auch er ließ aber den Skalarteil noch unabgetrennt. Am weitesten gingen Burali Forti und Marcolongo. Da sie von vornherein nur Operatoren betrachteten, kamen sie leicht zur Zerlegung:

$$\alpha = \mathrm{D}\alpha + \mathrm{V}\alpha \wedge,$$

die, affinoranalytisch geschrieben, lautet:

$$\mathbf{A} \llcorner\!\times = \mathbf{A}_t \llcorner\!\times + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}_v \times.$$

Nun war ihnen zwar der eine Teil von $\mathbf{A}_t \llcorner\!\times$:

$$\tfrac{1}{3}A_s.$$

unter der Form:

$$\tfrac{1}{3}S_1\alpha$$

bekannt, sie kamen aber nicht zu einer weiteren Zerlegung von $\mathbf{A}_t \llcorner\!\times$, was sich zum Teil aus ihrem ausschließlich operatorischen Gesichtspunkt erklären läßt, zum Teil aber auch daraus, daß sie ja nicht einmal die Verknüpfung **ab** als Produkt ansehen wollten, und da wohl schwierig zur Einführung einer ganz neuen Multiplikation $\times$ kommen konnten.

Die vollständige Zerlegung konnte erst unter Zugrundelegung des Prinzips der Klassifizierung erreicht werden. Diese Zerlegung bildet den grundsätzlichen Unterschied zwischen der Affinoranalysis und sämtlichen früheren Systemen.

Planare und lineare Dyaden. Ist ein Affinor **A** ein Teiler der Null, und also $A_{s3} = 0$, so macht $\mathbf{A} \llcorner\!\times$ wenigstens einen Vektor zu Null. Bei der Transformation werden sämtliche Ebenen in eine Ebene gebracht, die Dyade $\mathrm{K}\mathbf{A}_b \llcorner\!\times$ bringt also alle Vektoren in eine Richtung, und macht demnach wenigstens zwei Vektoren zu Null. Macht $\mathbf{A} \llcorner\!\times$ zwei Vektoren zu Null, so werden alle Ebenen zum Verschwinden gebracht, es ist also $\mathrm{K}\mathbf{A}_b$ und demnach $A_{s2} = S\mathbf{A}_b$ gleich Null. Im ersten Falle nennen

---

1) Siehe 6) auf S. 143. 2) 08. 5.

wir A nach Gibbs planar, im zweiten linear. Folgende Tabelle gibt eine Übersicht:

kein Teiler der Null: $A_{s3} \neq 0$
planar : $A_{s3} = 0,\ A_{s2} \neq 0$
linear : $A_{s3} = 0,\ A_{s2} = 0,\ A_s \neq 0.$

Ein Produkt in $\urcorner$ ist offenbar Teiler der Null, wenn irgendein Faktor Teiler der Null ist. Da jeder Vektor Teiler der Null in $\urcorner$ ist, sind also alle Produkte in $\urcorner$, die einen Vektor enthalten, Teiler der Null.

Die Bestimmung der Hauptrichtungen eines Affinors und die Zerlegung in Rotator und multiplikativen Tensor. Die 6 Hauptrichtungen der zweiten Normalform eines Affinors lassen sich folgendermaßen bestimmen. Ist

$$(276)\qquad \mathbf{A} = -A_{\mathrm{I}}\,\mathbf{a}_0'\mathbf{a}_0 - A_{\mathrm{II}}\,\mathbf{b}_0'\mathbf{b}_0 - A_{\mathrm{III}}\,\mathbf{c}_0'\mathbf{c}_0,$$

so sind die beiden Produkte:

$$(309)\qquad \begin{cases} \mathbf{A}\,\mathbf{A}_k = A_{\mathrm{I}}^2\,\mathbf{a}_0'\mathbf{a}_0' + A_{\mathrm{II}}^2\,\mathbf{b}_0'\mathbf{b}_0' + A_{\mathrm{III}}^2\,\mathbf{c}_0'\mathbf{c}_0' \\ \mathbf{A}_k\mathbf{A} = A_{\mathrm{I}}^2\,\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0 + A_{\mathrm{II}}^2\,\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0 + A_{\mathrm{III}}^2\,\mathbf{c}_0\mathbf{c}_0 \end{cases}$$

offenbar Tensoren. Jeder hat als Hauptrichtungen 3 der Hauptrichtungen von $\mathbf{A}$, letztere sind also durch zweimalige Lösung einer Gleichung der Form (260) zu bestimmen.

Man kann von dem Tensor $\mathbf{A}\,\mathbf{A}_k$ die Quadratwurzel

$$(310)\qquad \mathbf{A}_{Tv} = \pm A_{\mathrm{I}}\,\mathbf{a}_0'\mathbf{a}_0' \pm A_{\mathrm{II}}\,\mathbf{b}_0'\mathbf{b}_0' \pm A_{\mathrm{III}}\,\mathbf{c}_0'\mathbf{c}_0'$$

bestimmen. Die Koeffizienten $A_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{II}}, A_{\mathrm{III}}$ und $\mathbf{A}$ sind entweder alle negativ oder alle positiv. Dementsprechend ist hier das obere bzw. untere Zeichen zu wählen. Diese Quadratwurzel ist eine der vielen möglichen, sie unterscheidet sich durch das gleiche positive Vorzeichen ihrer Koeffizienten. Wir nennen den Tensor $\mathbf{A}_{Tv}$ den vorderen multiplikativen Tensor des Affinors $\mathbf{A}$. In ähnlicher Weise bestimmt sich aus $\mathbf{A}_k\mathbf{A}$ der hintere multiplikative Tensor

$$(311)\qquad \mathbf{A}_{Th} = \pm A_{\mathrm{I}}\,\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0 \pm A_{\mathrm{II}}\,\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0 \pm A_{\mathrm{III}}\,\mathbf{c}_0\mathbf{c}_0.$$

A_{Tv} und A_{Th} sind wohl zu unterscheiden von dem gewöhnlichen additiven Tensor des Affinors:

$$\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{A}_t = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}_k).$$

Jeder Affinor ist nun offenbar das affinorische Produkt des Affinors

$$(312)\qquad \mathbf{A}_R = \pm(\mathbf{a}_0'\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0'\mathbf{b}_0 + \mathbf{c}_0'\mathbf{c}_0),$$

den wir seinen Rotator nennen wollen[1]), mit seinem vorderen multiplikativen Tensor als Vorfaktor, oder mit seinem hinteren multiplikativen Tensor als Nachfaktor:

$$(313) \qquad \mathbf{A} = \quad {}_{v}\mathbf{A}_{R} = \mathbf{A}_{R}\mathbf{A}_{Th}.$$

Die Dyade $\mathbf{A}_R \llcorner^{\times}$ ergibt eine reine Drehung oder eine Drehung mit Inversion, denn sie führt als Vorfaktor das Rechtssystem $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ über in das Rechtssystem $\mathfrak{a}_0'$, $\mathfrak{b}_0'$, $\mathfrak{c}_0'$ oder in das Linkssystem $-\mathfrak{a}_0'$, $-\mathfrak{b}_0'$, $-\mathfrak{c}_0'$. Als Nachfaktor ergibt sich die umgekehrte Transformation. Es ist also:

$$(314) \qquad \mathbf{K}\mathbf{A}_R = (\mathbf{A}_R)^{-1}.$$

Umgekehrt ist jeder Affinor, dessen Konjugierter und Reziproker einander gleich sind, ein Rotator. Jede Drehung bzw. jede Drehung mit Inversion läßt sich offenbar in dieser Form angeben, und zwar auf ∞ viele Weisen, da jedes beliebige Rechtssystem die Nachfaktoren liefern kann und das aus diesem entstehende die Vorfaktoren. Die Wirkung einer Dyade kommt also stets einer Drehung mit oder ohne Inversion gleich, der eine rein tensorische Deformation folgt oder vorangeht. Die Drehung ist in beiden Fällen dieselbe.

Die verschiedenen Darstellungsweisen für einen Rotator. Eine Drehung um die $\mathbf{i}_1$ Achse um einen Winkel φ in der $2 \longrightarrow 3$ Richtung wird gegeben durch die rotatorische Dyade:

$$(315) \qquad \mathbf{A} \llcorner^{\times} = \{-\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 - (\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3)\cos\varphi + \mathbf{I} \urcorner \mathbf{i}_1 \sin\varphi\} \llcorner^{\times}.$$

Denn $-(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1)\llcorner^{\times}$ annulliert $\mathbf{i}_2$ und $\mathbf{i}_3$ und läßt $\mathbf{i}_1$ bestehen, $-(\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3)\llcorner^{\times}$ annulliert $\mathbf{i}_1$ und läßt $\mathbf{i}_2$ und $\mathbf{i}_3$ bestehen, und $(\mathbf{I} \urcorner \mathbf{i}_1)\llcorner^{\times}$ annulliert $\mathbf{i}_1$ und dreht Vektoren in der $2-3$ Ebene um 90^0 in der $2 \longrightarrow 3$ Richtung. Da nach (116), (130) und (145):

$$\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \urcorner \mathbf{i}_1,$$

kann man (315) durch einen allgemeinen Ausdruck ersetzen, der sich sofort für jeden Einheitsvektor $\mathfrak{a}_0$ verwenden läßt:

$$(316) \qquad \mathbf{A} \llcorner^{\times} = \{-\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_0 - (\mathfrak{a}_0 \urcorner \mathfrak{a}_0)\cos\varphi + (\mathbf{I} \urcorner \mathfrak{a}_0)\sin\varphi\} \llcorner^{\times}.$$

Für $\varphi = 90^0$ ist also:

$$\mathbf{A} \llcorner^{\times} = \{-\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_0 + \mathbf{I} \urcorner \mathfrak{a}_0\} \llcorner^{\times} = -(\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_0)\llcorner^{\times} + \mathfrak{a}_0 \times.$$

Da bei einer Drehung um die $\mathbf{i}_1$ Achse die beiden komplexen unver-

1) Gibbs verwandte hier das Wort Versor. Dieses von Hamilton herrührende Wort bleibe aber für die (uneigentliche) Drehungsgröße erster Ordnung vorbehalten (vgl. S. 37).

änderlichen (von der Wahl von $\mathfrak{i}_2$ und $\mathfrak{i}_3$ unabhängigen) Richtungen bestimmt sind durch die komplexen Vektoren:

$$(317)\quad \begin{cases} \mathfrak{i}_2' = \dfrac{\mathfrak{i}_2 - \mathfrak{i}_3\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \\ \mathfrak{i}_3' = \dfrac{\mathfrak{i}_2 + \mathfrak{i}_3\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

zu denen die Konstanten $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ gehören, und da das zu $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2', \mathfrak{i}_3'$ reziproke System $-\mathfrak{i}_1$, $-\mathfrak{i}_3'$, $-\mathfrak{i}_2'$ ist, läßt sich die Drehung um den Winkel φ in der $2 \longrightarrow 3$ Richtung auch angeben durch:

$$(318)\quad \mathbf{A} \llcorner^{\times} = -\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1 - e^{i\varphi}\mathfrak{i}_2'\mathfrak{i}_3' - e^{-i\varphi}\mathfrak{i}_3'\mathfrak{i}_2'.$$

Ein Rotator kann noch auf andere Weisen dargestellt werden. Ist $\mathfrak{a}_0$ ein Einheitsvektor in der Richtung der Drehungsachse, und $\mathfrak{b}$ ein Vektor senkrecht auf $\mathfrak{a}_0$, so ist:

$$(\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \mathfrak{a}_0 \sin\tfrac{1}{2}\varphi) \times \mathfrak{a}_0 \times (\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \mathfrak{a}_0 \sin\tfrac{1}{2}\varphi) = \mathfrak{a}_0,$$

und:

$$(\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \mathfrak{a}_0 \sin\tfrac{1}{2}\varphi) \times \mathfrak{b} \times (\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \mathfrak{a}_0 \sin\tfrac{1}{2}\varphi) = \\ = \mathfrak{b}\cos\varphi + \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{b}\sin\varphi.$$

Setzt man den Versor

$$(319)\quad \cos\tfrac{1}{2}\varphi + \mathfrak{a}_0 \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \boldsymbol{\varphi},$$

so kann man eine reine Drehung also darstellen als:

$$\boldsymbol{\varphi} \times \mathfrak{r} \times \boldsymbol{\varphi}_k,$$

und den Drehoperator als Lückenausdruck:

$$\boldsymbol{\varphi} \times (\ ) \times \boldsymbol{\varphi}_k.$$

$\boldsymbol{\varphi}$ nennen wir den Versor der Drehung. Dieser Lückenausdruck kann innerhalb der Vektoranalysis nicht gelöst werden, da derselbe eine Umgehung von Operatoren zweiter Ordnung darstellt. Nimmt man letztere hinzu, so ergibt sich folgende Lösung.

Die Dyade

$$(320)\quad (\mathbf{I} \urcorner \boldsymbol{\varphi}) \llcorner^{\times} = \cos\tfrac{1}{2}\varphi \cdot + \mathfrak{a}_0 \sin\tfrac{1}{2}\varphi \times$$

(vgl. 150) dreht jeden Vektor, der senkrecht zu $\mathfrak{a}_0$ gerichtet ist, um einen Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ um $\mathfrak{a}_0$ und verkürzt $\mathfrak{a}_0$ selbst zu $\mathfrak{a}_0 \cos\frac{1}{2}\varphi$. Die konjugierte Dyade

$$(\mathbf{I} \urcorner \boldsymbol{\varphi}_k) \llcorner^{\times}$$

bewirkt die umgekehrte Drehung, aber dieselbe Verkürzung. Die Dyade

$$(321)\quad \frac{\mathbf{I} \urcorner \boldsymbol{\varphi}}{(\mathbf{I} \urcorner \boldsymbol{\varphi}_k) \urcorner} \llcorner^{\times} = \frac{\mathbf{I} \urcorner \boldsymbol{\varphi}}{\urcorner (\mathbf{I} \urcorner \boldsymbol{\varphi}_k)} \llcorner^{\times}$$

ist also der gesuchte Drehoperator.

Da aus:

$$\varphi \times \mathbf{r} \times \varphi_k = \frac{\mathbf{I} \urcorner \varphi}{\urcorner (\mathbf{I} \urcorner \varphi_k)} \llcorner^{\times} \mathbf{r} \tag{322}$$

folgt:

$$\psi \times \varphi \times \mathbf{r} \times \varphi_k \times \psi_k = \frac{\mathbf{I} \urcorner (\psi \times \varphi)}{\urcorner \{\mathbf{I} \urcorner (\psi \times \varphi)_k\}} \llcorner^{\times} \mathbf{r}, \tag{323}$$

stellt man endliche Drehungen zusammen, indem man ihre zugehörigen Versoren quaternionisch multipliziert.[1])

Man kann nach dem Operator fragen, der eine einfache Drehung eines Affinors bewirkt. Ein Rotator mit $\urcorner$ leistet dies offenbar nicht. Da aber, wenn $\mathbf{R}$ ein Rotator ist, nach (237) und (314) folgt:

$$(\mathbf{R}\mathbf{a})(\mathbf{R}\mathbf{b}) = (\mathbf{R}\mathbf{a})(\mathbf{b}\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{R}(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{R}^{-1},$$

ist $\mathbf{R}(\ )\mathbf{R}^{-1}$ ein solcher Operator. Innerhalb der Affinoranalysis kann derselbe allgemein nur als Lückenausdruck dargestellt werden, da die zu seiner Umformung nötige Assoziationsänderung eine Multiplikation höherer Ordnung erfordert.

Eine andere Schreibweise für einen Rotator, die auch eine leichte Zusammenstellung endlicher Drehungen gestattet, ist folgende: Die Dyade

$$(-2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0 - \mathbf{I}) \llcorner^{\times},$$

wo $\mathbf{a}_0$ ein Einheitsvektor ist, läßt Vektoren in der Richtung von $\mathbf{a}_0$ unverändert, und dreht Vektoren, die senkrecht zu $\mathbf{a}_0$ gerichtet sind, um 180^0. Eine solche Dyade entspricht also einer Umlegung. Eine Drehung um den Winkel φ läßt sich bekanntlich stets durch die Aufeinanderfolge zweier Umlegungen erhalten:

$$\mathbf{A} \llcorner^{\times} = \{(2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0 + \mathbf{I})(2\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0 + \mathbf{I})\} \llcorner^{\times}, \tag{324}$$

wo $\mathbf{a}_0$ und $\mathbf{b}_0$ Einheitsvektoren senkrecht auf der Drehungsachse sind, die einen Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ einschließen. Nimmt man nun bei zwei aufeinander folgenden Drehungen die Vektoren in Formel (324) so, daß die aufeinander folgenden zu verschiedenen Dyaden gehörigen gleich sind, also:

$$\mathbf{A} \llcorner^{\times} = \{(2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0 + \mathbf{I})(2\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0 + \mathbf{I})\} \llcorner^{\times},$$
$$\mathbf{B} \llcorner^{\times} = \{(2\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0 + \mathbf{I})(2\mathbf{c}_0\mathbf{c}_0 + \mathbf{I})\} \llcorner^{\times},$$

---

1) Die bilineare Funktion, durch welche sich die Parameter der resultierenden Drehung aus denen der beiden nacheinander wirkenden ableiten, wurde schon 1840 (40. 1) von Rodrigues angegeben. Bekanntlich stellt diese Funktion das Multiplikationstheorem der Quaternionen dar (vgl. Study 90. 2). Die Gibbssche Dyadenrechnung, die durch die Voraussetzung $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = +1$ das Band mit den Quaternionen zerbrochen hat, gestattet nur eine viel weniger einfache Zusammenstellung, die statt über den Versor der Drehung, über den „vector semitangent of version" $\mathbf{a}_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$ führt (Wilson 01. 2, S. 334f.).

was bei zwei beliebigen Drehungen offenbar stets möglich ist, so ist das Produkt der Dyaden, da

$$(2\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_0 + \mathbf{I})(2\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_0 + \mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

ist, gleich

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\,\underline{|\times} = \{(2\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_0 + \mathbf{I})(2\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_0 + \mathbf{I})\}\,\underline{|\times}.$$

Die geometrische Bedeutung der tensorischen Dyade. Die Gleichung der Richtungsfläche einer tensorischen Dyade $\mathbf{A}\,\underline{|\times}$ ist, affinoranalytisch geschrieben:

$$\mathfrak{r}\cdot(\mathbf{A}\mathfrak{r}) = \mp 1. \tag{274}$$

Differenziert man diese Gleichung, indem man $\mathbf{A}$ dabei als konstant ansieht, so erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} d\mathfrak{r}\cdot(\mathbf{A}\mathfrak{r}) + \mathfrak{r}\cdot d(\mathbf{A}\mathfrak{r}) &= 0, \\ d\mathfrak{r}\cdot(\mathbf{A}\mathfrak{r}) + \mathfrak{r}\cdot(\mathbf{A}\,d\mathfrak{r}) &= 0, \text{ [1]} \\ d\mathfrak{r}\cdot(\mathbf{A}\mathfrak{r}) &= 0. \end{aligned}\right. \tag{325}$$

Diese Gleichung besagt, daß das Differential eines jeden Radiusvektors senkrecht steht auf den durch $\mathbf{A}\,\underline{|\times}$ aus diesem hervorgehenden Vektor. $\mathbf{A}\mathfrak{r}$ steht also senkrecht auf der Tangentialebene der Richtungsfläche in dem Endpunkt von $\mathfrak{r}$. Da

$$\mathfrak{r}\cdot(\mathbf{A}\mathfrak{r}) = \mp 1 \tag{274}$$

ist, so ist überdies der Betrag von $\mathbf{A}\mathfrak{r}$ gleich dem positiven oder negativen reziproken Betrage der aus O auf die Tangentialebene gefällten Senkrechten. Ordnen wir jeder Ebene des Raumes einen Vektor zu, der senkrecht auf der Ebene steht, und dessen Betrag gleich dem Reziproken der Länge des aus O auf die Ebene gefällten Lotes ist, so läßt sich die Wirkung einer tensorischen Dyade kurz wie folgt angeben:

> Regel: Eine tensorische Dyade führt den Radiusvektor ihrer Richtungsfläche in den positiven oder negativen Vektor der zugehörigen Tangentialebene über.

Eine für tensorische Dyaden charakteristische Regel ist nach (244):

$$\mathfrak{a}\cdot(\mathbf{A}\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}\cdot(\mathbf{A}\mathfrak{a}). \tag{326}$$

Wird

$$\mathfrak{a}\cdot(\mathbf{A}\mathfrak{b}) = 0,$$

---

[1] Die Differentialrechnung wird erst im fünften Kapitel behandelt, da es sich hier aber nur um Anwendung der allereinfachsten und ersten Rechnungsregel für Produkte handelt, und da es besser ist, daß die geometrische Deutung der tensorischen Dyade noch in diesem Kapitel stattfindet, möge diese Antizipation dem Leser genügend begründet erscheinen. (Man sehe übrigens S. 153.)

wo $\mathfrak{a}$ ein Radiusvektor der Richtungsfläche ist, so steht $\mathfrak{b}$ senkrecht auf dem Vektor der Tangentialebene im Endpunkt, liegt also in der zu $\mathfrak{a}$ konjugierten Ebene. Sind also $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ drei konjugierte Radien der Richtungsfläche, so sind

$$\mathfrak{a}' = \mp \mathbf{A}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{b}' = \mp \mathbf{A}\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{c}' = \mp \mathbf{A}\mathfrak{c}$$

ihre Reziproken, und wir erhalten demnach für einen Tensor $\mathbf{A}$ bzw. für $\mathbf{A}^{-1}$ unter Berücksichtigung von (284) eine dritte Normalform:

$$\text{(327)} \qquad \begin{cases} \mp \mathbf{A} \quad = \mathfrak{a}'\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}'\mathfrak{c}', \\ \mp \mathbf{A}^{-1} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}. \end{cases}$$

Zurückführung anderer Multiplikationen auf vektoranalytische. Gibbs definierte als

$$\mathbf{A} \times \mathfrak{g}$$

(skew product), wo

$$\mathbf{A} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\mathfrak{d} + \mathfrak{e}\mathfrak{f}$$

ist, den Affinor

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{g}) + \mathfrak{c}(\mathfrak{d} \times \mathfrak{g}) + \mathfrak{e}(\mathfrak{f} \times \mathfrak{g}),$$

den wir schreiben

$$\mathbf{A} \urcorner \mathfrak{g}.$$

Er umging dadurch auch hier den Gebrauch von Klammern, identifizierte dabei aber die vektorische mit der affinorischen Multiplikation. Da nach (240)

$$\text{(240)} \qquad (\mathfrak{a} \urcorner \mathbf{B})\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times (\mathbf{B}\mathfrak{c})$$

ist, so ist noch eine zweite Möglichkeit vorhanden, ein Produkt der Form $\mathfrak{a} \urcorner \mathbf{B}$ aus der Vektoranalysis abzuleiten, und zwar mit derselben Identifizierung. In der Tat haben Burali Forti und Marcolongo diese Ableitung gewählt.[1])

Das Produkt gab Gibbs Anlaß zur Bildung verschiedener Rechnungsregeln[2]):

Gibbs:	Affinoranalytisch:
$(\mathfrak{a} \times \Phi) \cdot \Psi = \mathfrak{a} \times (\Phi \cdot \Psi) = \mathfrak{a} \times \Phi \cdot \Psi,$	$\mathfrak{a} \urcorner \mathbf{B} \urcorner \mathfrak{c},$
$(\mathfrak{a} \times \Phi) \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times (\Phi \cdot \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \times \Phi \cdot \mathfrak{b},$	$(\mathfrak{a} \urcorner \mathbf{B})\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times (\mathbf{B}\mathfrak{b}),$ (240)
$(\mathfrak{a} \times \Phi) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times (\Phi \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \times \Phi \times \mathfrak{b},$	$\mathfrak{a} \urcorner \mathbf{B} \urcorner \mathfrak{b},$
$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \Phi = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \times \Phi,$	$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathbf{C} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \urcorner \mathbf{C}),$ (239)
$\Phi \cdot (\mathfrak{a} \times \Psi) = (\Phi \times \mathfrak{a}) \cdot \Phi.$	$\mathbf{A} \urcorner \mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{c}.$

In der Affinoranalysis ergeben sich diese Regeln entweder sofort aus der

1) 09. 12, S. 19. 2) 84. 2, 06. 1 S. 55, siehe auch 01. 2, S. 280.

assoziativen Eigenschaft von $\urcorner$, oder als Spezialfall der Multiplikationsgleichung für Dyaden (235).

Neben dem „double cross" Produkt hat Gibbs auch noch ein „double dot" Produkt von Dyadics eingeführt, durch die Definitionsgleichung:

$$(\mathbf{ab}):(\mathbf{cd}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}).$$

Aus (193) ergibt sich, daß dieses Produkt in folgender Beziehung zur Multiplikation $\overline{\ulcorner\cdot\urcorner}$ der Affinoranalysis steht:

$$\mathbf{A}:\mathbf{B} = \mathbf{A} \ulcorner\!\cdot\!\urcorner\, \mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k \ulcorner\!\cdot\!\urcorner\, \mathbf{B}.$$

Schließlich hat Jaumann 1906 als „vektorisches Doppelprodukt"[1]) mit dem Zeichen $\times$ ein Produkt definiert, das zu unserer Multiplikation $\overline{\times}\!\urcorner$ in der Beziehung steht:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A}\, \overline{\times}\!\urcorner\, \mathbf{B}_k$$

(vgl. S. 218).

Die Voigtsche Tensoranalysis. Die Transformationsweise der Bestimmungszahlen geometrischer Größen ist auch von W. Voigt zur Klassifizierung dieser Größen und zur Ableitung einiger Multiplikationen herangezogen. Nachdem er 1901[2]) eine sehr interessante Klassifizierung der Größen bis zur vierten Ordnung der Kristallelastizität herausgegeben hatte, bestimmte er 1904[3]) fünf der wichtigsten Multiplikationen zweiter Ordnung. Er ging dabei aus von den sechs Bestimmungszahlen eines Tensors und den dreien eines Vektors. Die Stellung dieser Multiplikationen (die unabhängig voneinander aufgefunden wurden) in der Affinoranalysis ergibt sich aus folgender Tabelle:

Tensorprodukt zweier Vektoren	$\perp$
Tensorprodukt eines Vektors und eines Tensors	$\frac{1}{2}\times$
Vektorprodukt eines Vektors und eines Tensors	$-\llcorner\!\times$
Skalarprodukt zweier Tensoren	$\ulcorner\!\cdot\!\urcorner$
Tensorprodukt zweier Vektoren	$-\underset{*}{\perp} = -\overset{\times}{\underset{\times}{}}$ (Gibbs).

Die ersten zwei kamen bis zu der Zeit in keiner Dyadenrechnung vor. Die Voigtsche Arbeit will keine Darstellung einer wirklichen geschlossenen Tensoranalysis sein, das Klassifizierungsprinzip wurde in ihr denn auch noch nicht zur Bildung eines geschlossenen Systems zweiter Ordnung herangezogen. Dennoch bedeutet diese Arbeit den bestehenden Systemen

1) 08. 6, S. 391. 2) 00. 2, 01. 1. 3) 04. 5.

gegenüber einen wesentlichen Fortschritt in der Ableitungsweise der Multiplikationen.

Die Stellung der Affinoranalysis zu den bestehenden Systemen zweiter Ordnung. Von allen bisherigen Systemen unterscheidet sich die Affinoranalysis eben durch die Zugrundelegung des Prinzips der Klassifizierung nach der Orientierungsweise. Die Multiplikationen werden nicht mehr dem jeweiligen praktischen Bedürfnis entsprechend unabhängig voneinander aufgefunden, sondern das System erscheint sofort als ein Geschlossenes, sämtliche Grund-, Haupt- und abgeleiteten Multiplikationen enthaltend. Indem ferner nicht nur jede Größe in drei Teile verschiedener Ordnung zerlegt werden kann, sondern auch jede Multiplikation sich auf $\cdot$, $\times$ und χ zurückführen läßt, gestattet die Affinoranalysis einen überaus systematischen Aufbau und eine leichte übersichtliche Behandlung der Formeln.

Ihre Vorzüge treten besonders scharf zutage in der Infinitesimalrechnung, deren Behandlung im nächsten Kapitel erfolgt.

Fünftes Kapitel.

Die Infinitesimalrechnung in der Affinoranalysis.

Die Differentiale geometrischer Größen. Sind Φ und Ψ geometrische Größen, beide beliebiger Art, und ihre Differentiale

$$d\Phi, d\Psi,$$

ist ferner $—\circ$ eine beliebige Multiplikation, so ist, dem distributiven Gesetz gemäß:

$$(328)\quad \begin{cases} d(\Phi + \Psi) = d\Phi + d\Psi \\ d^2(\Phi + \Psi) = d^2\Phi + d^2\Psi \\ \vdots \\ \text{usw.} \end{cases}$$

$$(329)\quad \begin{cases} d(\Phi —\circ \Psi) = d\Phi —\circ \Psi + \Phi —\circ d\Psi \\ d^2(\Phi —\circ \Psi) = d^2\Phi —\circ \Psi + 2d\Phi —\circ d\Psi + \Phi —\circ d^2\Psi \\ \vdots \\ \text{usw.} \end{cases}$$

Ist $—\circ$ dazu assoziativ, so ist:

$$(330)\quad \begin{cases} d\Phi^{2—\circ} = \Phi —\circ d\Phi + d\Phi —\circ \Phi \\ d\Phi^{3—\circ} = \Phi^{2—\circ} —\circ d\Phi + \Phi —\circ d\Phi —\circ \Phi + d\Phi —\circ \Phi^{2—\circ} \\ \vdots \\ d\Phi^{n—\circ} = \Phi^{(n-1)—\circ} —\circ d\Phi + \quad \cdots \quad + d\Phi —\circ \Phi^{(n-1)—\circ} \end{cases}$$

Ist Φ kein Teiler der Null in $—\circ$, und also $\Phi^{-1—\circ}$ endlich, so ist:

$$(331)\quad \begin{aligned} d\Phi^{-1—\circ} &= \Phi^{-1—\circ} —\circ d\Phi —\circ \Phi^{-1—\circ} \\ d\Phi^{-2—\circ} &= \Phi^{-2—\circ} —\circ d\Phi —\circ \Phi^{-1—\circ} + \Phi^{-1—\circ} —\circ d\Phi —\circ \Phi^{-2—\circ} \\ &\vdots \\ d\Phi^{-n—\circ} &= \Phi^{-n—\circ} —\circ d\Phi —\circ \Phi^{-1—\circ} + \cdots + \Phi^{-1—\circ} —\circ d\Phi —\circ \Phi^{-n—\circ}. \end{aligned}$$

Eine geometrische Größe als Funktion eines Skalars. Sind die Größen Φ und Ψ Funktionen eines Skalars t, so erhält man d

Differentialquotienten nach t durch Division der Differentiale durch dt, dt^2 usw., wobei, wenn es sich um partielle Differentialquotienten handelt, alle d in δ zu verändern sind. Bei der Bildung der Differentiale und der Differentialquotienten beliebiger geometrischer Größen sind also die Gesetze der Differenzierung gewöhnlicher Skalare gültig, solange nur kommutative und assoziative Multiplikationen in Frage kommen. Beim Auftreten nicht kommutativer Multiplikationen ist nur auf das Nichterlaubtsein des Faktorenwechsels Rücksicht zu nehmen.

Ein Skalar als Funktion einer einfachen Größe beliebiger Ordnung. Die Frage nach der Differenzierung eines Skalars a nach einer einfachen geometrischen Größe Φ kann eine doppelte Bedeutung haben. Entweder man fragt nach dem Operator Ψ —o, der, wie auch $d\Phi$ gerichtet sein mag, stets da erzeugt:

$$\frac{da}{d\Phi} = \Psi \multimap\ = \ \circ\!\!- \Psi,$$

oder man fragt, bei gegebener Multiplikation —o, nach dem Differentialquotienten, d. h. nach der Größe Ψ, die als Vor- oder Nachfaktor mit $d\Phi$ verknüpft stets da liefert:

$$\frac{da}{\multimap d\Phi} = \Psi \quad \text{oder} \quad \frac{da}{d\Phi\, \circ\!\!-} = \Psi.$$

Im ersten Falle darf von einer richtig aufgebauten Analysis erwartet werden, daß der gesuchte Operator im allgemeinen vorhanden ist, im zweiten Falle braucht die gesuchte Größe nur dann vorhanden zu sein, wenn die Multiplikation —o richtig gewählt wird.

Wie wir im zweiten Kapitel (S. 70 und 87) sahen, ließen sich zu jeder geometrischen Größe n^{ter} Ordnung $n' = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ zu einem bestimmten rechtwinkligen Koordinatensystem gehörige Sätze von orthogonalen Einheiten angeben, mit der Eigenschaft, daß die Koeffizienten der in diesen Einheiten ausgedrückten Größe sich bei Drehungen des Bezugssystems orthogonal transformieren. Sind also zwei einfache Größen von derselben Ordnung in solchen Einheiten gegeben:

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 \Omega_1 + \cdots + \Phi_{n'} \Omega_{n'}\\ \Psi &= \Psi_1 \Omega_1 + \cdots + \Psi_{n'} \Omega_{n'},\end{aligned}$$

so ist, nach einem schon S. 21 erwähnten invariantentheoretischen Satz, die Zahl:

$$\Phi_1 \Psi_1 + \cdots + \Phi_{n'} \Psi_{n'}$$

bei Drehungen des Bezugssystems invariant. Da diese Zahl eine in bezug

auf die Addition distributive Funktion von Φ und Ψ, und also ein Produkt dieser Größen ist, existiert zu jeder Ordnung eine kommutative Multiplikation o—o mit den Bedingungen:

$$\Omega_i \circ\!\!-\!\!\circ\, \Omega_j = \begin{cases} c \text{ wenn } i = j \\ o \quad ,, \quad i \neq j, \end{cases} \tag{332}$$

wo c eine gewöhnliche Zahl ist. Für $n = 1$ sind z. B. $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ orthogonale Einheiten, o—o $= \cdot$, und $c = -1$:

$$\left.\begin{cases} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -1 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1 = 0 \end{cases}\right\} \text{cycl.}$$

Für $n = 2$ sind $-\mathbf{I}_{11}$, $-\mathbf{I}_{22}$, $-\mathbf{I}_{33}$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ orthogonale Einheiten, o—o $= \boxdot$ und $c = +1$:

$$\left.\begin{cases} -\mathbf{I}_{11} \boxdot -\mathbf{I}_{11} = 1 & \mathbf{I}_1 \boxdot \mathbf{I}_1 \;= 1 \\ -\mathbf{I}_{11} \boxdot -\mathbf{I}_{22} = 0 & \mathbf{I}_1 \boxdot \mathbf{I}_2 \;= 0 \\ -\mathbf{I}_{11} \boxdot -\mathbf{I}_a \;= 0 & \mathbf{I}_1 \boxdot \mathbf{I}_{aa} = 0 \end{cases}\right\} \text{cycl.} \qquad a = 1, 2, 3. \tag{333}$$

Es sei nun ein Skalar p gegeben als eindeutige kontinuierliche Funktion der einfachen Größe n^{ter} Ordnung Φ, die orthogonalen Einheiten seien $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n'}$. Dann ist

$$\begin{cases} dp = \dfrac{\partial p}{\partial \Phi_1}\, d\Phi_1 + \cdots + \dfrac{\partial p}{\partial \Phi_{n'}}\, d\Phi_{n'} \\ d\Phi = \Omega_1 d\Phi_1 + \cdots + \Omega_{n'} d\Phi_{n'}. \end{cases} \tag{334}$$

Existiert nun eine Multiplikation o—o mit den obengenannten Bedingungen, so ist offenbar:

$$\left\{\left(\Omega_1 \frac{\partial}{\partial \Phi_1} + \cdots + \Omega_{n'} \frac{\partial}{\partial \Phi_{n'}}\right) p\right\} \circ\!\!-\!\!\circ\, d\Phi = c\,dp \tag{335}$$

und also:

$$\frac{dp}{{}_{\circ-\circ}\, d\Phi} = \frac{dp}{d\Phi_{\circ-\circ}} = \frac{1}{c}\left(\Omega_1 \frac{\partial}{\partial \Phi_1} + \cdots \Omega_{n'} \frac{\partial}{\partial \Phi_{n'}}\right) p. \tag{336}$$

Den Differentialoperator n^{ter} Ordnung

$$\left(\Omega_1 \frac{\partial}{\partial \Phi_1} + \cdots + \Omega_{n'} \frac{\partial}{\partial \Phi_{n'}}\right)\cdot$$

geben wir an durch das Zeichen

$$\overset{\Phi}{\nabla}\cdot$$

(∇ = Nabla) und schreiben also allgemein:

$$\frac{dp}{{}_{\circ-\circ}\, d\Phi} = \frac{dp}{d\Phi_{\circ-\circ}} = \frac{1}{c}\, \overset{\Phi}{\nabla} p. \tag{337}$$

Die Operatoren $\nabla\cdot$ sind offenbar invariant bei Drehungen des Bezugssystems.

Für $n = 0$ geht ∇ über in $\frac{d}{dx} = D$ der gewöhnlichen skalaren Differentialrechnung. Wir wollen festsetzen, daß das Zeichen ∇ wie D nur links von der zu differenzierenden Größe gesetzt wird, und daß seine Wirkung sich nur auf die Größe erstreckt, mit der es unmittelbar verknüpft ist.[1])

Ist $n = 1$, so ist

$$\frac{dp}{\cdot d\mathbf{s}} = \frac{dp}{d\mathbf{s}\cdot} = -\overset{\mathbf{s}}{\nabla} p. \tag{338}$$

In dem speziellen Falle, daß die unabhängig veränderliche Größe der Radiusvektor $\mathbf{r}$ ist, kann der Index fortgelassen werden:

$$\frac{dp}{\cdot d\mathbf{r}} = \frac{dp}{d\mathbf{r}\cdot} = -\nabla p. \tag{339}$$

Ist $n = 2$ und $\mathbf{D}$ der Deviator, nach welchem differenziert wird, so ist

$$\frac{dp}{\boxed{\cdot}\, d\mathbf{D}} = \frac{dp}{d\mathbf{D}\,\boxed{\cdot}} = \overset{\mathbf{D}}{\nabla} p. \tag{340}$$

Eine beliebige Größe als Funktion eines Vektors. Es sei Φ eine beliebige geometrische Größe, eine eindeutige kontinuierliche Funktion eines Vektors $\mathbf{s}$. Es werde der Differentialquotient

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{s} \overset{1}{-}\!\circ}$$

gesucht, wo $\overset{1}{-}\!\circ$ eine vorläufig unbekannte Multiplikation ist, die so zu wählen ist, daß die Quotientbildung überhaupt möglich ist. Da

$$\Phi = f(s_1, s_2, s_3) \tag{341}$$

ist, so ergibt sich:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} ds_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial s_3} ds_3, \tag{342}$$

und da

$$d\mathbf{s} = \mathbf{i}_1 ds_1 + \mathbf{i}_2 ds_2 + \mathbf{i}_3 ds_3$$

ist, so ist die Quotientbildung möglich, falls es zur Multiplikation $\overset{1}{-}\!\circ$ eine andere $\overset{2}{-}\!\circ$ gibt, so, daß für jede beliebige Größe Ψ von derselben Orientierungsweise als Φ gilt:

---

1) Beide Bedingungen sind wohl zu beachten. Da sich ∇, wie wir weiter sehen werden, in derselben Weise zu den skalaren Operatoren $\frac{d}{dt}$ verhält, wie ein Vektor zu einer Zahl, sind die formalen Regeln für das Arbeiten mit skalaren Differentialoperatoren inne zu halten. Es ist namentlich zu vermeiden, das Zeichen hinter die zu differenzierende Größe zu stellen, oder über Klammern hinweg zu differenzieren (vgl. S. 206 und 207).

(343) $$\mathfrak{a} \overset{1}{-}\!\circ (\mathfrak{b} \overset{2}{-}\!\circ \Psi) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \Psi,$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebige Vektoren sind. Denn in dem Falle ist, in ähnlicher Weise wie oben für die Differenzierung eines Skalars abgeleitet wurde:

(344) $$\frac{d\Phi}{d\mathfrak{s} \overset{1}{-}\!\circ} = -\left(\mathfrak{i}_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + \mathfrak{i}_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \mathfrak{i}_3 \frac{\partial}{\partial s_3}\right) \overset{2}{-}\!\circ \Phi$$
$$= -\overset{\mathfrak{s}}{\nabla} \overset{2}{-}\!\circ \Phi .$$

Ist Φ ein Skalar, so sind sowohl $\overset{1}{-}\!\circ$ als $\overset{2}{-}\!\circ$ gleich $\cdot$, denn es ist

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} c) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) c,$$

und es ergibt sich hier also nochmals, daß:

(338) $$\frac{d p}{d \mathfrak{s} \cdot} = -\overset{\mathfrak{s}}{\nabla} p .$$

Ist Φ ein Vektor, so ist nach (173c):

(173c) $$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c},$$

also:

$$\overset{1}{-}\!\circ = \lfloor\!\times$$
$$\overset{2}{-}\!\circ = \lfloor\!_ ,$$

und demnach:

(345) $$\frac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{s} \lfloor\!\times} = -\overset{\mathfrak{s}}{\nabla} \mathfrak{v},$$

oder bei Differenzierung nach dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$:

(346) $$\frac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{r} \lfloor\!\times} = -\nabla \mathfrak{v} = -(\alpha \nabla \cdot \mathfrak{v} + \beta \nabla \times \mathfrak{v} + \gamma \nabla \text{X} \mathfrak{v})$$

(nach (160)).

Der vollständige Differentialquotient eines Vektors nach einem Vektor ist also ein Affinor.

Eine beliebige Größe als Funktion einer beliebigen einfachen Größe. Ist Φ die unabhängig Veränderliche n^{ter} Ordnung, ausgedrückt in den n' orthogonalen Einheiten $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n'}$ und Ψ die abhängig Veränderliche, so ist:

(347) $$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_1} d\Phi_1 + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_{n'}} d\Phi_{n'}$$
$$d\Phi = \Omega_1 d\Phi + \cdots + \Omega_{n'} d\Phi_{n'} .$$

Existieren nun zwei Multiplikationen $\overset{1}{-}\!\circ$ und $\overset{2}{-}\!\circ$, so daß stets gilt:

(348) $$\Upsilon \overset{1}{-}\!\circ (\Pi \overset{2}{-}\!\circ \Lambda) = (\Upsilon \circ\!\!-\!\!\circ \Pi) \Lambda ,$$

wo Υ und Π beliebige Größen n^{ter} Ordnung, Λ eine beliebige Größe der-

selben Orientierungsweise wie Φ, und $\circ\!-\!\circ$ die zur Ordnung n gehörige, auf S. 155 definierte, stets existierende Multiplikation ist, so gilt offenbar:

$$(349)\qquad \begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\Phi \overset{1}{-\!\circ}} &= \frac{1}{c}\left(\Omega_1 \frac{\partial}{\partial \Phi_1} + \cdots + \Omega_{n'} \frac{\partial}{\partial \Phi_{n'}}\right) \overset{2}{-\!\circ}\, \Psi \\ &= \frac{1}{c} \overset{\Phi}{\nabla} \overset{2}{-\!\circ}\, \Psi . \end{aligned}$$

Dieser Fall umfaßt sämtliche vorhergehenden Fälle. Von einer richtig gebildeten Analysis höherer Ordnung darf erwartet werden, daß die Multiplikationen $\overset{1}{-\!\circ}$ und $\overset{2}{-\!\circ}$, wenigstens für den Fall, daß Ψ eine einfache Größe ist, stets vorhanden sind. Ist Ψ zusammengesetzt, so kann der Differentialquotient für jeden Teil gesondert angegeben werden. Der totale Differentialquotient ist dann aber nicht einfach die Summe, da sich im allgemeinen zu jedem Teil eine andere Multiplikation gesellen wird.

Allgemeines über die Differentialoperatoren $\nabla\!-\!\!\circ$. In derselben Weise, wie ein gewöhnlicher Operator sich aus einer Größe und einer Multiplikation zusammensetzt, setzen sich die Differentialoperatoren $\nabla\!-\!\!\circ$ zusammen aus einem Operatorkern ∇ und einer Multiplikation.

Sind

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_{n'}$$

die n' Bestimmungszahlen einer Größe Φ n-ter Ordnung, die sich bei Drehung des Bezugssystems in bestimmter Weise transformieren, so transformieren sich die partiellen Differentialoperatorkerne[1])

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \Phi_{n'}}$$

bei Drehung des Bezugssystems nach einem bekannten Satze der Invariantentheorie kontragredient zu den Φ. Ist nun insbesondere die Größe Φ in orthogonalen Einheiten ausgedrückt, so transformieren sich ihre Bestimmungszahlen orthogonal, die partiellen Differentialoperatoren demnach nicht nur kontragredient, sondern auch kogredient zu diesen Zahlen. Die bestimmenden skalaren Operatorkerne des gerichteten Operatorkernes



$$\overset{\Phi}{\nabla}$$

1) In der gewöhnlichen oder Skalaranalysis nennt man $\frac{d}{dt}$ einen Operator, während doch eigentlich erst $\frac{d}{dt}\cdot$ ein Operator ist und $\frac{d}{dt}$ dagegen ein Operatorkern. Da die Skalaranalysis aber keine verschiedenen Multiplikationen kennt, ist diese Unterscheidung dort unwichtig, in den höheren Analysen ist sie aber streng durchzuführen, da Verwirrungen sonst nicht zu vermeiden sind.

transformieren sich also wie die Bestimmungszahlen einer Größe n^{ter} Ordnung, und das Resultat einer Verknüpfung einer beliebigen Größe mit $\overset{\Phi}{\nabla}$ ist demnach von derselben Orientierungsweise wie dieselbe Verknüpfung dieser Größe mit einer Größe n^{ter} Ordnung. Nach der auf S. 89 ausgesprochenen Regel ergibt sich infolgedessen, daß sich die allgemeinste Verknüpfung eines Differentialoperatorkernes n^{ter} mit einer Größe m^{ter} Ordnung aus $(2p+1)$ einfachen Größen $q-p, \ldots, q+p^{\text{ter}}$ Ordnung zusammensetzt, wo

$$\left.\begin{matrix} q = m \\ p = n \end{matrix}\right\} \text{ ist für } m > n \text{ und}$$

$$\left.\begin{matrix} q = n \\ p = m \end{matrix}\right\} \text{ für } m < n.$$

Innerhalb der Affinoranalysis, die sich nur mit Größen bis zur zweiten Ordnung befaßt, können also die folgenden Fälle vollständig behandelt werden:

Funktionen:	Art des totalen Differentialquotienten:
1. Skalar, Funktion eines Skalars	Skalar
2. „ „ „ Vektors	Vektor
3. „ „ „ Deviators	Deviator
4. Vektor, „ „ Skalars	Vektor
5. „ „ „ Vektors	Affinor
6. Deviator, „ „ Skalars	Deviator

Von diesen gehört 1 der gewöhnlichen Differentialrechnung an, und fallen 2 und 4 auch innerhalb des Bereiches der Vektoranalysis.

Da die Differentialoperatorkerne n^{ter} Ordnung dieselbe Orientierungsweise haben wie die Größen n^{ter} Ordnung, verhalten sie sich zu diesen Größen ebenso wie die skalaren Operatorkerne $\frac{d}{dt}$ zu den gewöhnlichen Zahlen. Namentlich gehorchen sie den Multiplikationsgesetzen der Größen ihrer Ordnung in derselben Weise und ebensoweit, wie die Operatorkerne $\frac{d}{dt}$ den Gesetzen der skalaren Multiplikation. Die Anwendung dieser Gesetze zum Beweise neuer Formeln, ist also, wie Burkhardt schon 1896[1]) für $n = 1$ bemerkte, durchaus gerechtfertigt und invariantentheoretisch vollkommen zu begründen. Nur muß dabei beachtet werden, daß die Operatoren keine gewöhnlichen, sondern eben Differentialoperatoren sind. Man hat sich daher stets zu vergegenwärtigen, auf welche Größen sie als solche zu wirken haben. Keineswegs sind sie wie Burali Forti und Marcolongo für $n = 1$ meinen, bloß „tachigraphes essentiels“, die

1) 96. 3.

womöglich zu vermeiden wären (vgl. S. 91 und 208), im Gegenteil sind sie als Operatoren höherer Ordnung ebenso berechtigt wie die Zahlen höherer Ordnung. Erst durch ihre Anwendung erreicht eine jegliche höhere Analysis ihre charakteristische Eleganz und Kürze.

Das Skalarfeld. Außer den Funktionen von skalaren Veränderlichen sind für die Physik die eindeutigen Funktionen des Ortsvektors von ganz besonderer Wichtigkeit. Ist eine Größe als eine solche Funktion gegeben, so bestimmt sie ein Feld, und zwar kann man je nach der Art der Größe unterscheiden Skalarfelder, Vektorfelder, Deviatorfelder, Affinorfelder usw.

In dem Skalarfeld des Skalars p:

$$p = f(\mathfrak{r})$$

werden die Flächen, auf die p einen konstanten Wert hat, gegeben durch die Gleichung

$$p = \text{konstant.}$$

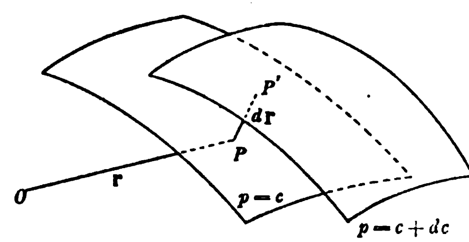


Fig. 13. Skalarfeld mit Niveauflächen.

Senkrecht auf diesen Flächen stehen die Linien des größten Gefälles. Ist P ein Punkt der Fläche

$$p = c,$$

und P' ein Punkt der benachbarten Fläche

$$p = c + dc,$$

dann ist nach (339):

$$dp = -\,d\mathfrak{r} \cdot (\nabla p) \qquad \text{(Fig. 13).}$$

Bei konstantem dp ist $d\mathfrak{r}$ am kleinsten, wenn ∇p und $d\mathfrak{r}$ in derselben Geraden liegen, ∇p hat also die Richtung der Normalen der Fläche $p = c$. Die spezifische Zunahme von p in jeder anderen Richtung ist gegeben durch die Projektion von ∇p auf diese Richtung, was aus (339) oder auch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $PP'P''$ und $PQ''Q'$ in Fig. 14 hervorgeht. Der negative totale Differentialquotient eines skalaren Feldes:

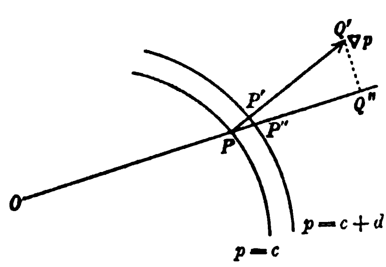


Fig. 14. Skalarfeld mit Niveaulinien und Gradientvektor.

$$(339) \qquad -\frac{dp}{d\mathfrak{r}} = \nabla p$$

gibt in jedem Punkt den relativen Zuwachs nach Richtung und Größe an und wird daher bezeichnet mit grad p (Gradient). Für ein Skalarfeld ist also

$$(350) \qquad \operatorname{grad} p = \nabla p.$$

Der Vektor grad p ist wiederum eine Funktion von $\mathbf{r}$, bildet also ein Vektorfeld, und zwar ein solches, wie es aus der Differenzierung eines Skalarfeldes hervorgehen kann. Das Vektorfeld grad p bezeichnen wir als negatives Differentialfeld oder Gradientfeld von p.

Das Vektorfeld. Ist der Vektor $\mathbf{v}$ als eindeutige Funktion des Ortsvektors $\mathbf{r}$ gegeben:

$$\mathbf{v} = f(\mathbf{r}),$$

dann ist nach (346):

$$d\mathbf{v} = \mathbf{i}_1 dv_1 + \mathbf{i}_2 dv_2 + \mathbf{i}_3 dv_3 = -d\mathbf{r}(\nabla \mathbf{v})$$

$$\text{(351)} \qquad \begin{cases} dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial v_1}{\partial r_2} dr_2 + \frac{\partial v_1}{\partial r_3} dr_3 \\ dv_2 = \frac{\partial v_2}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial v_2}{\partial r_2} dr_2 + \frac{\partial v_2}{\partial r_3} dr_3 \\ dv_3 = \frac{\partial v_3}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial v_3}{\partial r_2} dr_2 + \frac{\partial v_3}{\partial r_3} dr_3 . \end{cases}$$

Deuten wir $\mathbf{v}$ als die Geschwindigkeit der Strömung einer idealen inkompressibelen Flüssigkeit, die die Eigenschaft hat, an bestimmten Stellen, Quellen, entstehen, und an anderen, Senken, verschwinden zu können, so gibt in einem bestimmten Punkt P des Feldes $d\mathbf{v}$ die relative Geschwindigkeit der Teilchen des Differentialraumelements um P in bezug auf das Teilchen in P an, wenn der Ort eines jeden derartigen Teilchens durch $d\mathbf{r}$ gegeben ist. Da nach (346):

$$d\mathbf{v} = -d\mathbf{r}(\nabla\mathbf{v}) = -\tfrac{1}{3} d\mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \tfrac{1}{2} d\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - d\mathbf{r} \mathbin{X} (\nabla \mathbin{X} \mathbf{v})$$

ist, läßt sich diese relative Bewegung in drei Teile zerlegen.

Der erste Teil:

$$\text{(352)} \qquad d\mathbf{v}^{(1)} = -\tfrac{1}{3} d\mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

dessen Komponenten:

$$\text{(353)} \qquad dv_1^{(1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r_1} + \frac{\partial v_2}{\partial r_2} + \frac{\partial v_3}{\partial r_3}\right) dr_1, \text{ cycl.},$$

sind, ist eine nach allen Seiten gleichmäßig von P aus oder nach P hingehende Strömung, je nachdem $\nabla \cdot \mathbf{v}$ negativ oder positiv ist. Die Geschwindigkeit im Abstande $d\mathbf{r}$ von P beträgt $\frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})(d\mathbf{r})_m$ in der Richtung nach P hin, die Einströmung pro Zeiteinheit in eine Kugel mit dem Radius $(d\mathbf{r})_m$ also:

$$4\pi (d\mathbf{r})_m^2 \tfrac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})(d\mathbf{r})_m$$

und dieselbe pro Volumeinheit berechnet demnach:

$$\text{(354)} \qquad \frac{4\pi (d\mathbf{r})_m^2 \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})(d\mathbf{r})_m}{\frac{4}{3}\pi (d\mathbf{r})_m^3} = \nabla \cdot \mathbf{v} .$$

Die Größe $\nabla \cdot \mathbf{v}$, die das Maß der reinen Strömung nach P hin ist und Senkenstärke in P genannt werden kann, wird mit conv $\mathbf{v}$ (Convergenz) bezeichnet:

(355) $$\operatorname{conv} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Die Operation conv $= \nabla \cdot$ ergibt, bei Anwendung auf ein Vektorfeld, sämtliche Senken und Quellen dem Ort und der Größe nach. Das Skalarfeld $\nabla \cdot \mathbf{v}$ nennt man das skalare Differentialfeld oder Senkenfeld von $\mathbf{v}$.

Derselbe Operator auf einen Skalar angewandt, erzeugt dort den negativen totalen Differentialquotienten:

(339, 350) $$\nabla \cdot p = \operatorname{grad} p = -\frac{dp}{d\mathbf{r}},$$

und zwar aus dem Grunde, weil die skalare Multiplikation hier zugleich die totale Multiplikation ist. Der Name Konvergenz verliert hier seine anschauliche Bedeutung. Da der Operator $\nabla \cdot$ aber in beiden Fällen derselbe ist, wollen wir die Bezeichnung conv auch auf die Differenzierung eines Skalarfeldes anwenden. Wir gewinnen dadurch das Recht, stets grad p durch conv p ersetzen zu dürfen, wodurch eine besondere Vereinfachung vieler Formeln erzielt werden kann.[1])

Der zweite Teil der Bewegung um P:

(356) $$d\mathbf{v}^{(2)} = -\tfrac{1}{2} d\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{v}),$$

ist, wie aus der Formel ersichtlich, eine reine Drehung um den Vektor $(\nabla \times \mathbf{v})$ als Achse, deren Drehrichtung der Richtung von $\nabla \times \mathbf{v}$ mit Hilfe einer Rechtsschraube zugeordnet ist, und deren Winkelgeschwindigkeit gleich

$$\tfrac{1}{2} \mathrm{M}(\nabla \times \mathbf{v})$$

ist. Die Größe $\nabla \times \mathbf{v}$, die das Maß der reinen Drehung um eine Achse durch P ist und Wirbelstärke genannt wird, bezeichnet man mit rot $\mathbf{v}$:

(357) $$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

Die Operation rot $= \nabla \times$ ergibt bei Anwendung auf ein Vektorfeld sämtliche Wirbel des Feldes, dem Ort, der Richtung und dem Betrage nach. Das Vektorfeld $\nabla \times \mathbf{v}$ nennt man das vektorische Differentialfeld oder Wirbelfeld von $\mathbf{v}$.

1) Wir behalten natürlich das Recht, stets auch die Bezeichnung grad p anzuwenden. Wem also die Unterscheidung von Skalaren und Vektoren durch die Schriftart noch nicht genügt, oder, wer noch besonders zum Ausdruck bringen will, daß die Größe conv p im Gegensatz zu conv $\mathbf{v}$ ein negativer totaler Differentialquotient ist, der mag das Zeichen grad verwenden, wo es ihm nützlich erscheint.

Der dritte Teil der Bewegung um P:

(358) $$d\mathfrak{v}^{(3)} = -d\mathfrak{r} \times (\nabla \times \mathfrak{r}),$$

dessen Komponenten

(359) $$\left.\begin{aligned} d\mathfrak{v}_1^{(3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{2\,\partial v_1}{\partial r_1} - \frac{\partial v_2}{\partial r_2} - \frac{\partial v_3}{\partial r_3}\right) d\mathfrak{r}_1 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r_2} + \frac{\partial v_2}{\partial r_1}\right) dr_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r_3} + \frac{\partial v_3}{\partial r_1}\right) dr_3 \end{aligned}\right\} \text{cycl.}$$

sind, entspricht einer Deformation des Differentialraumelements ohne räumliche Ausdehnung und ohne Drehung. Bei einer solchen Deformation bleiben stets drei bestimmte unter sich senkrechte Achsen ihrer Richtung nach ungeändert (vgl. S. 132), während alle anderen eine Richtungsänderung erleiden. Für diese Art Deformation haben wir den Namen Deviation eingeführt. Wir bezeichnen demnach die Größe $\nabla \times \mathfrak{v}$, die diesen Bewegungsteil bestimmt, mit dev $\mathfrak{v}$:

(360) $$\operatorname{dev} \mathfrak{v} = \nabla \times \mathfrak{v}.$$

Die Operation $\nabla \times$ ergibt, bei Anwendung auf ein Vektorfeld, sämtliche Stellen, an denen Deviation auftritt. Nennen wir diese Stellen Scheren, so bestimmt $\nabla \times$ also den Ort, die Orientierung und den Betrag sämtlicher Scheren des Feldes. Das Deviatorfeld $\nabla \times \mathfrak{v}$ bezeichnen wir als deviatorisches Differentialfeld oder Scherenfeld von $\mathfrak{v}$.

Die Gleichung (346) läßt sich jetzt in folgender Weise schreiben:

(361) $$-\frac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{r}\lfloor\times} = \nabla\mathfrak{v} = \alpha \operatorname{conv} \mathfrak{v} + \beta \operatorname{rot} \mathfrak{v} + \operatorname{dev} \mathfrak{v}.$$

Die Funktion $\nabla\mathfrak{v}$ ist der negative vollständige Differentialquotient des Vektors $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{r}$ und kann demnach als Gradient des Feldes $\mathfrak{v}$ angesprochen werden:

(339, 350) $$\operatorname{grad} p = -\frac{dp}{d\mathfrak{r}\cdot} = \nabla p = \operatorname{conv} p$$

(362) $$\operatorname{grad} \mathfrak{v} = -\frac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{r}\lfloor\times} = \nabla\mathfrak{v} = \alpha \operatorname{conv} \mathfrak{v} + \beta \operatorname{rot} \mathfrak{v} + \operatorname{dev} \mathfrak{v}$$

Das Feld $\nabla\mathfrak{v}$ bezeichnen wir als negatives Differentialfeld oder Gradientfeld von $\mathfrak{v}$.

Bei den Gleichungen (350) und (362) ist zu beachten, daß grad ein Funktionszeichen ist, und stets den negativen vollständigen Differentialquotienten bildet, conv, rot und dev dagegen Operationszeichen sind, die sich unabhängig von der Art der passiven Größe stets in derselben Weise aus dem Operatorkern ∇, verbunden mit irgendeiner Multiplikation, ab-

leiten. Bei einem Skalar p ergibt der Operator conv gerade die Funktion grad p, es darf aber nicht

$$\text{conv} = \text{grad}$$

gesetzt werden, da dasselbe bei anderen Größen nicht der Fall ist.

Die mnemotechnische Bedeutung der Zeichen der Grundmultiplikationen. Die Wahl der Zeichen für die Grundmultiplikationen kann jetzt begründet werden. Das erste und zugleich einem größeren Teil der mathematischen Physik nächstliegende Untersuchungsgebiet, das sich mit Größen höherer Ordnung befaßt, ist das Vektorfeld. In ihm entspricht die Senke bzw. Quelle dem Skalarteil des abgeleiteten Affinors, entstehend durch skalare Multiplikation von ∇ mit dem Vektor des Feldes. Es liegt also nahe, der skalaren Multiplikation ein Zeichen zu geben, daß die punktförmige Senke bzw. Quelle versinnlicht. Das beste, und sich natürlich darbietende Zeichen wäre der vielseitig symmetrische Strahlenkomplex oder Stern:

$$* .$$

Das Zeichen ist aber schwer zu schreiben und muß also, wenigstens für die Schrift, durch ein einfacheres ersetzt werden. Da bietet sich denn nichts anderes als der Punkt:

$$\cdot \, ,$$

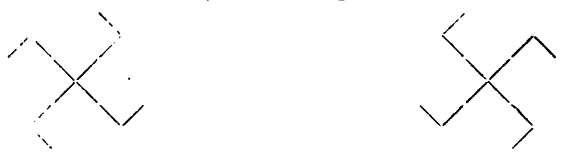
oder der kleine Kreis

$$\circ \, ,$$

der aber, da er auch an eine Drehung erinnert, weniger charakteristisch ist. Nun hat, anscheinend zufällig, Gibbs in seiner Vektoranalysis gerade den Punkt als Zeichen der skalaren Multiplikation gewählt, und dieses Zeichen bekommt dadurch einen noch größeren Vorzug. Die von Burali Forti und Marcolongo gegen seine Verwendung hervorgehobene Tatsache, daß der Punkt auch als Trennungszeichen bei der Multiplikation von gewöhnlichen Zahlen gebraucht werde, verwandelt sich in unserer Analysis in einen ganz besonderen Vorzug, da wir ja diese Multiplikation mit der skalaren identifiziert haben, und da wir, unseren für den Gebrauch der Zeichen aufgestellten Prinzipien (S. 115) gemäß, das Zeichen $\cdot$ zwar unterdrücken können, es aber auch jederzeit gebrauchen dürfen. Wo wir es also in diesem Falle verwenden wollen, steht es nicht nur da als bloßes Trennungszeichen, sondern zugleich auch als richtiges Multiplikationszeichen.

Der vektorische Bestandteil des Gradienten eines Vektorfeldes, der durch die vektorische Multiplikation von ∇ mit dem Vektor des Feldes entsteht, entspricht einer reinen Rotation des Differentialraumelements. Für die vektorische Multiplikation ist also ein Zeichen zu wählen, das

eine Drehung versinnlicht. Das natürliche Zeichen der Drehung, das schon den alten Indern bekannt war, ist die sogenannte Svastika:



deren Verwendung den Vorzug bieten würde, für eine nicht kommutative Grundmultiplikation auch ein nicht kommutatives Zeichen zu besitzen. Für die Schrift ist aber dieses Zeichen viel zu kompliziert. Wir müssen daher zu

greifen, oder gar zu dem rechtwinkligen Kreuz

×, [1])

dem Zeichen, welches Gibbs, wiederum anscheinend zufällig, für diese Multiplikation einführte, für die eine Richtung, und × (Drehung entgegengesetzt der Uhrzeigerrichtung) für die andere. Da man in den meisten Fällen mit × allein auskommt, empfiehlt sich diese Festsetzung, da sie am wenigsten neue Zeichen erfordert. Das Zeichen × für die skalare Multiplikation zu verwenden, wie Burali Forti und Marcolongo es tun, ist grundsätzlich zu verwerfen. Dasselbe gilt hinsichtlich des von ihnen für die vektorische Multiplikation eingeführten Zeichens $\wedge$. Will man schon ein neues Zeichen einführen, dann soll dies doch wenigstens asymmetrisch in bezug auf die vertikale Mittellinie sein.

Dem dritten, deviatorischen Bestandteil des Gradienten, der durch die deviatorische Multiplikation von ∇ mit dem Feldvektor entsteht, entspricht die rein deviatorische Deformation, die alle geraden Winkel bis auf drei in schiefe umsetzt. Das schiefe Kreuz

X

bildet also eine vorzügliche Versinnbildlichung gerade dieses Bestandteiles. Auch ist es als symmetrisches Zeichen der kommutativen deviatorischen Multiplikation angemessen.

Das Affinorfeld. Ist ein Affinorfeld $\mathbf{A}$ als eindeutige Funktion des Ortvektors gegeben, so stellt

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{r}}$$

einen Operator dar, der sich aus folgenden Teilen zusammensetzt:

1) Das hier aus typographischen Rücksichten verwendete Zeichen ist zwar nicht vollkommen genau rechtwinklig, es unterscheidet sich aber doch genügend von dem daneben verwendeten schiefen Kreuz, um Verwechslung auszuschließen.

Für den Skalarteil von **A**: Vektor ·
„ „ Vektorteil „ „: Skalar ·, Vektor ×, Deviator X.
„ „ Deviatorteil „ „: Vektor X, Deviator ×, Septor —o,

wo —o eine zur Analysis dritter Ordnung gehörige Multiplikation ist. Dies ist ein zusammengesetzter Operator der Analysis dritter Ordnung (eine Gibbssche Triade), der sich nicht in derselben einfachen Weise wie eine Dyade in eine Größe und eine Multiplikation zerlegen läßt. Eine adäquate Darstellung dieses Operators innerhalb der Affinoranalysis ist ausgeschlossen, und die vollständige Behandlung des Affinorfeldes ist also hier nicht möglich. Sowie es aber innerhalb der Vektoranalysis möglich ist, von einem Vektorfeld wenigstens das skalare und vektorische Differentialfeld darzustellen, ohne daß damit die Behandlung des Differentialfeldes selbst gegeben wäre, kann auch die Affinoranalysis wenigstens zwei wichtige Teile des Differentialfeldes eines Affinors zur Ausdruck bringen. Diese Teile sind, erstens das vektordyadische Differentialfeld, ein Vektorfeld, das sich, wie wir sehen werden, charakteristisch als Senkenfeld ansprechen läßt, und demnach mit Conv **A** bezeichnet werden mag:

$$\text{(363)} \qquad \operatorname{Conv} \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} = \tfrac{1}{3} \operatorname{conv} A_s + \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{A}_v + \operatorname{dev} \mathbf{A}_d$$

und zweitens das affinorische Differentialfeld, ein Affinorfeld, das in ähnlicher Weise Wirbelfeld zu benennen ist und die Bezeichnung Rot **A** erhält:

$$\text{(364)} \qquad \operatorname{Rot} \mathbf{A} = \nabla \urcorner \mathbf{A}.$$

Die Bedeutung dieser Felder kommt in der Theorie der Felder am Ende dieses Kapitels zur Sprache. (Vgl. 200 u. f. und 227 u. f.)

Anwendung der gerichteten Differentialoperateren auf Summen und Produkte. Dem distributiven Gesetz gemäß ist für Operatoren und Größen irgendwelcher Ordnung:

$$\text{(365)} \qquad \overset{\Omega}{\nabla}(\Phi + \Psi) = \overset{\Omega}{\nabla}\Phi + \overset{\Omega}{\nabla}\Psi.$$

Da ferner für jeden skalaren Operator $\frac{\partial}{\partial t}\cdot$ dem distributiven Gesetz gemäß, gilt:

$$\text{(366)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\Phi \multimap \Psi) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \multimap \Psi + \Phi \multimap \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

wo —o eine beliebige Multiplikation ist, gilt für jeden gerichteten Differentialoperator:

$$\text{(367)} \quad \overset{\Omega}{\nabla} \overset{1}{\multimap} (\Phi \overset{2}{\multimap} \Psi) = \overset{\Omega}{\nabla}_\Phi \overset{1}{\multimap} (\Phi \overset{2}{\multimap} \Psi) + \overset{\Omega}{\nabla}_\Psi \overset{1}{\multimap} (\Phi \overset{2}{\multimap} \Psi),$$

wo der Index $_\Phi$ angibt, daß nach Φ zu differenzieren und Ψ als Konstante zu betrachten ist. Die Gleichung ist durch nochmalige Anwendung des distributiven Gesetzes zu beweisen.

Zur Umformung dieser Gleichung ist folgendermaßen zu verfahren. Für jeden Teil suche man die Assoziation so zu ändern, daß der gerichtete Differentialoperator mit der zu differenzierenden Größe in der richtigen Reihenfolge zusammenkommt, z. B.:

$$(368) \qquad \overset{\Omega}{\nabla}_\Phi \overset{1}{-\!\circ} (\Phi \overset{2}{-\!\circ} \Psi) = (\overset{\Omega}{\nabla} \overset{3}{-\!\circ} \Phi) \overset{4}{-\!\circ} \Psi.$$

Die Indizes fallen dann fort, und der Differentialquotient ist zerlegt in zwei Quotienten, in denen jedesmal einer der Faktoren als Konstante erscheint[1]). Von einer richtig gebildeten Analysis geometrischer Größen darf erwartet werden, daß die Multiplikationen $\overset{3}{-\!\circ}$ und $\overset{4}{-\!\circ}$, wenigstens für den Fall, daß Φ und Ψ einfache Größen sind, stets vorhanden sind.

Die abgeleiteten Differentialoperatoren. Wird ein Differentialoperatorkern ∇ mit einer gerichteten Größe als Konstante multipliziert, z. B.:

$$\Phi -\!\circ \overset{\Omega}{\nabla},$$

wo $-\!\circ$ eine beliebige Multiplikation ist, so entsteht ein neuer Differentialoperatorkern, der nicht mehr die einfache Bedeutung hat, einen Differentialquotienten oder den Teil eines solchen zu bilden. Wird ein Operator mit einem solchen Kern auf eine andere Größe angewandt:

$$(\Phi \overset{1}{-\!\circ} \overset{\Omega}{\nabla}) \overset{2}{-\!\circ} \Psi$$

und ist Assoziationsänderung möglich:

$$\Phi \overset{3}{-\!\circ} (\overset{\Omega}{\nabla} \overset{4}{-\!\circ} \Psi),$$

so gestattet der Operator $(\Phi \overset{1}{-\!\circ} \nabla) \overset{2}{-\!\circ}$ die Umgehung der Multiplikationen $\overset{3}{-\!\circ}$ und $\overset{4}{-\!\circ}$ durch Verwendung von $\overset{1}{-\!\circ}$ und $\overset{2}{-\!\circ}$. Sind dabei letztere Multiplikationen von einer niederen Ordnung als $\overset{3}{-\!\circ}$ und $\overset{4}{-\!\circ}$, so ermöglicht also der Gebrauch des abgeleiteten Operators, wenn auch nicht in völlig adäquater Weise, in den Zeichen einer Analysis niederer Ordnung Tatsachen zur Darstellung zu bringen, die eigentlich einer Analysis höherer Ordnung angehören.

Sind z. B. in obenerwähnter Gleichung:

$$(367) \quad \overset{\Omega}{\nabla} \overset{1}{-\!\circ} (\Phi \overset{2}{-\!\circ} \Psi) = \overset{\Omega}{\nabla}_\Phi \overset{1}{-\!\circ} (\Phi \overset{2}{-\!\circ} \Psi) + \overset{\Omega}{\nabla}_\Psi \overset{1}{-\!\circ} (\Psi \overset{2}{\circ\!-} \Phi)$$

---

1) Wie unter Anwendung des distributiven Gesetzes unmittelbar hervorgeht, darf bei dieser Assoziationsänderung von einer zufälligen Kommutabilität von $\overset{2}{-\!\circ}$ (z. B. wenn $\Phi = \Psi$) kein Gebrauch gemacht werden.

die zu $\overset{1}{-}\!\circ$, $\overset{2}{-}\!\circ$ gehörigen, eine Assoziationsänderung erlaubenden, Multiplikationen $\overset{3}{-}\!\circ$, $\overset{4}{-}\!\circ$, sind aber solche Multiplikationen zu $\overset{1}{-}\!\circ$, $\circ\!\overset{1}{-}$ in der Analysis, mit der man arbeitet, nicht vorhanden[1]), so läßt sich die Umformung wenigstens in folgender Weise vollziehen:

$$(369)\quad \overset{\Omega}{\nabla} \overset{1}{-}\!\circ (\Phi \overset{2}{-}\!\circ \Psi) = (\overset{\Omega}{\nabla} \overset{3}{-}\!\circ \Phi) \overset{4}{-}\!\circ \Psi + (\Phi \overset{3}{-}\!\circ \overset{\Omega}{\nabla}) \overset{4}{-}\!\circ \Psi.$$

In der Tat finden sich innerhalb der Vektoranalysis verschiedene solche Umgehungen höherer Multiplikationen.

Die Anwendung von Differentialoperatoren erster Ordnung auf Summen und Produkte von Skalaren und Vektoren. Die Wirkung der Differentialoperatoren erster Ordnung bildet ein Beispiel zu obigen allgemeinen Erörterungen.

Summen von Skalaren, Vektoren und Affinoren.

$$(370)\quad \nabla(a \dot{+} b) = \nabla a + \nabla b,$$

$$(371)\quad \nabla \multimap (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \multimap \mathbf{a} + \nabla \multimap \mathbf{b},$$

$$(372)\quad \nabla \multimap (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \multimap \mathbf{A} + \nabla \multimap \mathbf{B}$$

(umfaßt (370) u. (371), wo $\multimap$ eine beliebige Multiplikation ist).

Produkt von zwei Skalaren.

grad:

$$(373)\quad \begin{cases} \nabla(ab) = \nabla_a(ab) + \nabla_b(ab) \\ = \nabla a b + a \nabla b. \end{cases}$$

Produkt eines Skalars mit einem Vektor.

conv:

$$(374)\quad \nabla \cdot (a\mathbf{b}) = \nabla_a \cdot (a\mathbf{b}) + \nabla_{\mathbf{b}} \cdot (a\mathbf{b}) = \nabla a \cdot \mathbf{b} + a \nabla \cdot \mathbf{b}.$$

rot:

$$(375)\quad \nabla \times (a\mathbf{b}) = \nabla_a \times (a\mathbf{b}) + \nabla_{\mathbf{b}} \times (a\mathbf{b}) = \nabla a \times \mathbf{b} + a \nabla \times \mathbf{b}.$$

dev:

$$(376)\quad \nabla \mathsf{X} (a\mathbf{b}) = \nabla_a \mathsf{X} (a\mathbf{b}) + \nabla_{\mathbf{b}} \mathsf{X} (a\mathbf{b}) = \nabla a \mathsf{X} \mathbf{b} + a \nabla \mathsf{X} \mathbf{b}$$

grad:

$$(377)\quad \nabla(a\mathbf{b}) = \nabla_a(a\mathbf{b}) + \nabla_{\mathbf{b}}(a\mathbf{b}) = \nabla a\mathbf{b} + a\nabla\mathbf{b}.$$

Rot:

$$(378)\quad \nabla \urcorner (a\mathbf{b}) = \nabla_a \urcorner (a\mathbf{b}) + \nabla_{\mathbf{b}} \urcorner (a\mathbf{b}) = \nabla a \urcorner \mathbf{b} + a \nabla \urcorner \mathbf{b}.$$

Skalares Produkt zweier Vektoren.

grad:

$$(379)\quad \begin{cases} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \nabla_{\mathbf{a}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \nabla_{\mathbf{b}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ \quad = (\nabla \mathbf{a})\mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b})\mathbf{a} = \text{grad}\, \mathbf{a}\mathbf{b} + \text{grad}\, \mathbf{b}\mathbf{a} \text{ (nach (173c))} \\ \quad \left.\begin{array}{l} = \frac{1}{3} \text{conv}\, \mathbf{a}\mathbf{b} + \frac{1}{2} \text{rot}\, \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \text{dev}\, \mathbf{a} \mathsf{X} \mathbf{b} \\ + \frac{1}{3} \text{conv}\, \mathbf{b}\mathbf{a} + \frac{1}{2} \text{rot}\, \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \text{dev}\, \mathbf{b} \mathsf{X} \mathbf{a} \end{array}\right\} \text{(nach (174))}, \end{cases}$$

1) Vgl. Fußnote S. 167.

oder nach (175):

$$\text{(380)}\quad \begin{cases} \nabla(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = -\,\mathfrak{b}\times(\nabla\times\mathfrak{a}) + (\mathfrak{b}\cdot\nabla)\mathfrak{a} \\ \qquad\qquad\quad -\,\mathfrak{a}\times(\nabla\times\mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}\cdot\nabla)\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Die Umformung (380) bedient sich nur der Multiplikationen der Vektoranalysis, die abgeleiteten Operatoren $(\mathfrak{a}\cdot\nabla)$ und $(\mathfrak{b}\cdot\nabla)$ dienen zur Umgehung der deviatorischen Multiplikation.

Vektorisches Produkt zweier Vektoren.

conv:

$$\text{(381)}\quad \begin{cases} \nabla\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = \nabla_{\mathfrak{a}}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) + \nabla_{\mathfrak{b}}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) \\ \qquad = (\nabla\mathfrak{a})\,\overline{\cdot|}\,\mathfrak{b} - (\nabla\mathfrak{b})\,\overline{\cdot|}\,\mathfrak{a} \quad \text{(nach (166))} \end{cases}$$

oder nach (172):

$$\text{(382)}\quad \nabla\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = (\nabla\times\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b} - (\nabla\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{a}.$$

rot:

$$\text{(383)}\quad \begin{cases} \nabla\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = \nabla_{\mathfrak{a}}\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) + \nabla_{\mathfrak{b}}\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) \\ \qquad = (\nabla\mathfrak{a})\,\overline{\times|}\,\mathfrak{b} - (\nabla\mathfrak{b})\,\overline{\times|}\,\mathfrak{a} \\ \qquad = (\nabla \urcorner \mathfrak{a})\mathfrak{b} - (\nabla \urcorner \mathfrak{b})\mathfrak{a} \quad \text{(nach (173b))} \\ \qquad = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{conv}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} - \mathrm{dev}\,\mathfrak{a}\boldsymbol{\times}\mathfrak{b} \\ \qquad - \tfrac{2}{3}\,\mathrm{conv}\,\mathfrak{b}\mathfrak{a} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{b}\times\mathfrak{a} + \mathrm{dev}\,\mathfrak{b}\boldsymbol{\times}\mathfrak{a} \quad \text{(nach (176))}, \end{cases}$$

oder nach (175):

$$\text{(384)}\quad \begin{cases} \nabla\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}(\nabla\cdot\mathfrak{a}) - (\mathfrak{b}\cdot\nabla)\mathfrak{a} \\ \qquad\qquad -\,\mathfrak{a}(\nabla\cdot\mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}\cdot\nabla)\mathfrak{b}, \end{cases}$$

oder nach (180):

$$\text{(385)}\quad \begin{cases} \nabla\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}\times\nabla)\times\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\times(\nabla\times\mathfrak{a}) \\ \qquad\qquad -\,(\mathfrak{a}\times\nabla)\times\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\times(\nabla\times\mathfrak{b}). \end{cases}$$

Auch in den beiden letzten Formeln ist die Umgehung der Multiplikation $\boldsymbol{\times}$ durch den Gebrauch von abgeleiteten Differentialoperatoren erreicht.

dev:

$$\text{(386)}\quad \begin{cases} \nabla\boldsymbol{\times}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = \nabla_{\mathfrak{a}}\boldsymbol{\times}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) + \nabla_{\mathfrak{b}}\boldsymbol{\times}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) \\ \qquad = (\nabla\mathfrak{a})\,\overline{\boldsymbol{\times}|}\,\mathfrak{b} - (\nabla\mathfrak{b})\,\overline{\boldsymbol{\times}|}\,\mathfrak{a} \\ \qquad = -(\nabla\urcorner\mathfrak{a})\,\lfloor\!\boldsymbol{\times}\!\rfloor\,\mathfrak{b} + (\nabla\urcorner\mathfrak{b})\,\lfloor\!\boldsymbol{\times}\!\rfloor\,\mathfrak{a} \quad \text{(nach (186b))}, \end{cases}$$

oder nach (189):

$$\text{(387)}\quad \begin{cases} \nabla\boldsymbol{\times}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = -\tfrac{1}{3}\mathfrak{b}\times(\nabla\boldsymbol{\times}\mathfrak{a}) - \tfrac{1}{3}(\mathfrak{b}\boldsymbol{\times}\nabla)\times\mathfrak{a} \\ \qquad\qquad + \tfrac{1}{3}\mathfrak{a}\times(\nabla\boldsymbol{\times}\mathfrak{b}) + \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}\boldsymbol{\times}\nabla)\times\mathfrak{b} \\ \qquad = \tfrac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{\times}\mathfrak{a})\times\mathfrak{b} - \tfrac{1}{2}(\nabla\times\mathfrak{a})\boldsymbol{\times}\mathfrak{b} \\ \qquad - \tfrac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{\times}\mathfrak{b})\times\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}(\nabla\times\mathfrak{b})\boldsymbol{\times}\mathfrak{a}, \end{cases}$$

oder nach (190):

$$(388)\quad \begin{cases} \nabla \times\!\!\!\!\times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{b} \times\!\!\!\!\times (\nabla \times \mathbf{a}) - (\mathbf{b} \times \nabla) \times\!\!\!\!\times \mathbf{a} \\ \qquad + \mathbf{a} \times\!\!\!\!\times (\nabla \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \nabla) \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}. \end{cases}$$

grad:

$$(389)\quad \begin{cases} \nabla (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla_a(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \nabla_b(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \qquad = (\nabla \mathbf{a}) \urcorner \mathbf{b} - (\nabla \mathbf{b}) \urcorner \mathbf{a} \quad \text{(nach (167))}. \end{cases}$$

Deviatorisches Produkt zweier Vektoren.

rot:

$$(390)\quad \begin{cases} \nabla \times (\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) = \nabla_a \times (\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) + \nabla_b \times (\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) \\ \qquad = \mathbf{b} \times\!\!\!\!\times (\nabla \times \mathbf{a}) - (\mathbf{b} \times \nabla) \times\!\!\!\!\times \mathbf{a} \\ \qquad + \mathbf{a} \times\!\!\!\!\times (\nabla \times \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \times \nabla) \times\!\!\!\!\times \mathbf{b} \\ \qquad = \frac{1}{2}(\nabla \times\!\!\!\!\times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} + \frac{3}{2}(\nabla \times \mathbf{a}) \times\!\!\!\!\times \mathbf{b} \\ \qquad + \frac{1}{2}(\nabla \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} + \frac{3}{2}(\nabla \times \mathbf{b}) \times\!\!\!\!\times \mathbf{a} \end{cases} \text{(nach (187))},$$

oder nach (188):

$$(391)\quad \begin{cases} \nabla \times (\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) = -\mathbf{b} \times (\nabla \times\!\!\!\!\times \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \times\!\!\!\!\times \nabla) \times \mathbf{a} \\ \qquad - \mathbf{a} \times (\nabla \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \nabla) \times \mathbf{b}. \end{cases}$$

dev, Conv:

$$(392)\quad \begin{cases} \nabla \times\!\!\!\!\times (\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) = \nabla_a \times\!\!\!\!\times (\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) + \nabla_b \times\!\!\!\!\times (\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) \\ \qquad = (\nabla \diagdown \mathbf{a})\mathbf{b} + (\nabla \diagdown \mathbf{b})\mathbf{a} \qquad \text{(nach (184))} \\ \qquad = \frac{5}{9}(\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - \frac{5}{12}(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} + \frac{1}{6}(\nabla \times\!\!\!\!\times \mathbf{a}) \times\!\!\!\!\times \mathbf{b} \\ \qquad + \frac{5}{9}(\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - \frac{5}{12}(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} + \frac{1}{6}(\nabla \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) \times\!\!\!\!\times \mathbf{a} \quad \text{(nach (182))}, \end{cases}$$

oder nach (177):

$$(393)\quad \begin{cases} \nabla \times\!\!\!\!\times (\mathbf{a} \times\!\!\!\!\times \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \frac{1}{2}\mathbf{b}(\nabla \mathbf{a}) - \frac{1}{3}(\nabla \mathbf{a})\mathbf{b} \\ \qquad + \frac{1}{2}\mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(\nabla \mathbf{b}) - \frac{1}{3}(\nabla \mathbf{b})\mathbf{a}. \end{cases}$$

Dyadisches Produkt zweier Vektoren.

Conv:

$$(394)\quad \begin{cases} \nabla(\mathbf{ab}) = \nabla_a(\mathbf{ab}) + \nabla_b(\mathbf{ab}) \\ \qquad = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla \mathbf{b}) \quad \text{(nach (173c))} \\ \qquad = \text{conv}\, \mathbf{ab} + \mathbf{a}\, \text{grad}\, \mathbf{b}. \end{cases}$$

Rot:

$$(395)\quad \begin{cases} \nabla \urcorner (\mathbf{ab}) = \nabla_a \urcorner (\mathbf{ab}) + \nabla_b \urcorner (\mathbf{ab}) \\ \qquad = (\nabla \times \mathbf{a})\mathbf{b} - \mathbf{a} \urcorner (\nabla \mathbf{b}) \qquad \text{(nach (167))} \\ \qquad = \text{rot}\, \mathbf{ab} - \mathbf{a} \urcorner \text{grad}\, \mathbf{b}. \end{cases}$$

Affinorisches Produkt zweier Vektoren.

Conv:

$$(396)\quad \begin{cases} \nabla(\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b}) = \nabla_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b}) + \nabla_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b}) \\ \qquad = (\nabla \times \mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} - \mathfrak{a}(\nabla \urcorner \mathfrak{b}) \qquad \text{(nach (173b))} \\ \qquad = \operatorname{rot} \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \operatorname{Rot} \mathfrak{b}. \end{cases}$$

Rot:

$$(397)\quad \begin{cases} \nabla \urcorner (\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b}) = \nabla_{\mathfrak{a}} \urcorner (\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b}) + \nabla_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b}) \\ \qquad = (\nabla \urcorner \mathfrak{a}) \urcorner \mathfrak{b} + (\mathfrak{a} \ulcorner \nabla) \urcorner \mathfrak{b}, \end{cases}$$

oder nach (161b):

$$(398)\quad \begin{cases} \nabla \urcorner (\mathfrak{a} \urcorner \mathfrak{b}) = -\nabla \urcorner (\mathfrak{b}\mathfrak{a}) + 2\beta \nabla(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \\ \qquad = -\operatorname{rot} \mathfrak{b}\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \urcorner \operatorname{grad} \mathfrak{a} \qquad \text{(nach (167))} \\ \qquad + 2\beta \operatorname{grad} \mathfrak{a}\mathfrak{b} + 2\beta \operatorname{grad} \mathfrak{b}\mathfrak{a} \qquad \text{(nach (173c)).} \end{cases}$$

Produkt eines Skalars mit einem Affinor.

Conv:

$$(399)\quad \begin{cases} \nabla(a\mathbf{B}) = \nabla_a(a\mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{B}}(a\mathbf{B}) \\ \qquad = \nabla a \mathbf{B} + a \nabla \mathbf{B} \\ \qquad = \operatorname{conv} a\mathbf{B} + a \operatorname{Conv} \mathbf{B}. \end{cases}$$

Rot:

$$(400)\quad \begin{cases} \nabla \urcorner (a\mathbf{B}) = \nabla_a \urcorner (a\mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{B}}(a\mathbf{B}) \\ \qquad = \nabla a \urcorner \mathbf{B} + a \nabla \urcorner \mathbf{B} \\ \qquad = \operatorname{conv} a \urcorner \mathbf{B} + a \operatorname{Rot} \mathbf{B}. \end{cases}$$

Vektordyadisches Produkt eines Vektors mit einem Affinor.

conv:

$$(401)\quad \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{A}\mathfrak{b}) = \nabla_{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A}\mathfrak{b}) + \nabla_{\mathfrak{b}} \cdot (\mathbf{A}\mathfrak{b}) \\ \qquad = (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathfrak{b} + (\nabla \mathfrak{b}) \boxdot (\mathbf{A}_k) \qquad \text{(nach (245))} \\ \qquad = \operatorname{Conv} \mathbf{A} \cdot \mathfrak{b} + \operatorname{grad} \mathfrak{b} \boxdot \mathbf{A}_k. \end{cases}$$

rot:

$$(402)\quad \begin{cases} \nabla \times (\mathbf{A}\mathfrak{b}) = \nabla_{\mathbf{A}} \times (\mathbf{A}\mathfrak{b}) + \nabla_{\mathfrak{b}} \times (\mathbf{A}\mathfrak{b}) \\ \qquad = (\nabla \urcorner \mathbf{A})\mathfrak{b} + (\nabla \mathfrak{b}) \,\overline{\times}\!\urcorner\, \mathbf{A}_k \qquad \text{(nach (241))} \\ \qquad = \operatorname{Rot} \mathbf{A}\mathfrak{b} + \operatorname{grad} \mathfrak{b} \,\overline{\times}\!\urcorner\, \mathbf{A}_k. \end{cases}$$

dev:

$$(403)\quad \begin{cases} \nabla \mathsf{X} (\mathbf{A}\mathfrak{b}) = \nabla_{\mathbf{A}} \mathsf{X} (\mathbf{A}\mathfrak{b}) + \nabla_{\mathfrak{b}} \mathsf{X} (\mathbf{A}\mathfrak{b}) \\ \qquad = (\mathfrak{b} \lrcorner \nabla) \,\overline{\times}\!\urcorner\, \mathbf{A}_k + \nabla \mathfrak{b} \,\overline{\times}\!\urcorner\, \mathbf{A}_k \qquad \text{(nach (237)).} \end{cases}$$

Zu einer weiteren Umformung der letzten Formel müßte eine Multipli-

kation herangezogen werden, die innerhalb der Affinoranalysis nicht vorkommt. Auch

$$\nabla(\mathbf{A}\mathbf{b})$$

läßt sich also hier nicht ohne Verwendung von abgeleiteten Operatoren angeben.

Affinorisches Produkt eines Vektors mit einem Affinor.

Conv:

$$(404)\quad \begin{cases} \nabla(\mathbf{a} \urcorner \mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{a}}(\mathbf{a} \urcorner \mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{B}}(\mathbf{a} \urcorner \mathbf{B}) \\ \qquad = (\nabla \times \mathbf{a})\mathbf{B} - \mathbf{a}(\nabla \urcorner \mathbf{B}) \qquad \text{(nach (239))} \\ \qquad = \operatorname{rot} \mathbf{a}\mathbf{B} - \mathbf{a} \operatorname{Rot} \mathbf{B}, \end{cases}$$

$$(405)\quad \begin{cases} \nabla(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{b}) = \nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{b}) + \nabla_{\mathbf{b}}(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{b}) \\ \qquad = (\nabla \mathbf{A}) \times \mathbf{b} + \mathbf{A}_k \overline{\times\urcorner} (\nabla \mathbf{b}) \qquad \text{(nach (241))} \\ \qquad = \operatorname{Conv} \mathbf{A} \times \mathbf{b} + \mathbf{A}_k \overline{\times\urcorner} \operatorname{grad} \mathbf{b}. \end{cases}$$

Rot:

$$(406)\quad \begin{cases} \nabla \urcorner (\mathbf{a} \urcorner \mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{a}} \urcorner (\mathbf{a} \urcorner \mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{B}} \urcorner (\mathbf{a} \urcorner \mathbf{B}) \\ \qquad = (\nabla \urcorner \mathbf{a}) \urcorner \mathbf{B} + (\mathbf{a} \ulcorner \nabla) \urcorner \mathbf{B} \\ \qquad = \left. \begin{array}{l} (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{B} - (\nabla \llcorner \mathbf{a})\mathbf{B} + \\ + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{B} \end{array} \right\} \text{(nach (161b))} \end{cases}$$

$$(407)\quad \nabla \urcorner (\mathbf{A} \urcorner \mathbf{b}) = (\nabla \urcorner \mathbf{A}) \urcorner \mathbf{b} + (\mathbf{A} \ulcorner \nabla) \urcorner \mathbf{b}.$$

Affinorisches Produkt zweier Affinoren.

Conv:

$$(408)\quad \begin{cases} \nabla(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}\mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \\ \qquad = \nabla \mathbf{A}\mathbf{B} + (\mathbf{A} \underline{\times}\!\lrcorner\, \nabla)\mathbf{B} \qquad \text{(nach (235))}. \end{cases}$$

Rot:

$$(409)\quad \begin{cases} \nabla \urcorner (\mathbf{A}\mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{A}} \urcorner (\mathbf{A}\mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{B}} \urcorner (\mathbf{A}\mathbf{B}) \\ \qquad = \nabla \urcorner \mathbf{A}\mathbf{B} + (\mathbf{A} \ulcorner \nabla)\mathbf{B}. \end{cases}$$

Auch in den letzten vier Fällen müssen abgeleitete Operatoren verwendet werden.

Verschiedene Ausdrücke für das Differential des Feldvektors. Nach (346) ist:

$$d\mathbf{v} = -\tfrac{1}{3}\, d\mathbf{r} \cdot \operatorname{conv} \mathbf{v} - \tfrac{1}{2}\, d\mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} - d\mathbf{r} \mathbin{X} \operatorname{dev} \mathbf{v}.$$

$d\mathbf{v}$ wird hier in vollkommen symmetrischer Weise zerlegt in seine drei Bestandteile nullter bzw. erster und zweiter Ordnung, die den drei möglichen Bewegungsarten des Differentialraumelements entsprechen. Die

Vektoranalysis, die nur die Multiplikationen $\cdot$ und $\times$ kennt, ebensowie die herkömmliche Dyadenrechnung, die $\llcorner$ und $\urcorner$ nicht auf die Grundmultiplikationen zurückführt, kann niemals zu dieser Zerlegung von $d\mathbf{v}$ gelangen, und es sind daher mannigfache Versuche angestellt worden, $d\mathbf{v}$ doch in irgendeiner Weise aufzulösen.

Die wichtigsten sind folgende:

$$(410) \qquad d\mathbf{v} = -\nabla_{\mathbf{v}}(d\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) + (\nabla\times\mathbf{v})\times d\mathbf{r}.$$ [1]

Diese Gleichung ist in einfacher Weise aus (346) abzuleiten, da nach (379):

$$-\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}) = -\tfrac{1}{3}(\nabla\cdot\mathbf{v})\,d\mathbf{r} - \tfrac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{v})\times d\mathbf{r} - (\nabla \mathbin{X} \mathbf{v}) \mathbin{X} d\mathbf{r}.$$

Sie gibt eine ganz willkürliche und geometrisch unwichtige Zerlegung von $d\mathbf{v}$.

Da nach der Bedeutung von ∇ (vgl. S. 166):

$$\nabla(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}) + \nabla_{d\mathbf{r}}(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}),$$
$$= \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}) - \mathbf{v}$$

ist, und:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + d\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}) + (\nabla\times\mathbf{v})\times d\mathbf{r},$$

wo $\mathbf{v}_0$ der Feldwert im Punkte $\mathbf{r}$ und $\mathbf{v}$ der Wert im Nachbarpunkte $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ ist, ergibt sich:

$$(411) \qquad d\mathbf{v} = -\tfrac{1}{2}\{\nabla(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}) + \mathbf{v}_0\} - \tfrac{1}{2}\,d\mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{v}).$$ [2]

Diese Art der Zerlegung trennt den Vektorteil richtig ab, läßt aber den Skalar und Deviatorteil zusammen und noch dazu in sehr undurchsichtiger Weise.

Wilson gab dieser Gleichung die Form:

$$d\mathbf{v} = \{-\nabla_{\mathbf{v}}(d\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) + \tfrac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{v})\times d\mathbf{r}\} + \tfrac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{v})\times d\mathbf{r}$$ [3]),

die sich unmittelbar aus (410) ableiten läßt.

Die Differentialoperatoren erster Ordnung zweiten Grades. Wird der Differentialoperator ∇ —o, wo —o jedesmal eine beliebige Multiplikation angibt, zweimal hintereinander angewandt, so ist diese Aufeinanderfolge als Differentialoperator zweiten Grades anzusprechen. Je nach den verschiedenen in Anwendung kommenden Multiplikationen entstehen verschiedene Operatoren zweiten Grades.

Bei Differenzierung eines Skalars kommen folgende als wichtigste in Betracht.

---

1) S. z. B. 01. 2 S. 163.
2) 01. 2 S. 163; 09. 13 S. 37. 3) Vgl. 01. 2 S. 165.

1°:

$$(412) \qquad \nabla\cdot(\nabla a) = \operatorname{conv}\operatorname{grad} a = \operatorname{conv}\operatorname{conv} a = \nabla^{2}\cdot a,$$

wo $\nabla^{2}\cdot$ (der negative Operator von Laplace) nicht etwa nur eine symbolische Bedeutung hat, sondern in derselben Weise als skalares Produkt des vektorischen Operatorkernes ∇, wie $\frac{d^2}{dt^2}$ als skalares Produkt des skalaren Operatorkernes $\frac{d}{dt}$ mit sich selbst aufzufassen ist. Nach (161b) und (185) ist:

$$(413) \qquad 3\alpha\nabla^{2}\cdot = \nabla^{2\llcorner} + \nabla^{2\urcorner} = \tfrac{1}{3}\nabla^{2\llcorner} + \tfrac{1}{2}\nabla^{2\urcorner} + \nabla^{2\diagdown}.$$

2°:

$$(414) \qquad \nabla\times(\nabla a) = \operatorname{rot}\operatorname{conv} a = 0,$$

da das vektorische Produkt eines Vektors mit sich selbst stets Null ist.

3°:

$$(415) \qquad \nabla \mathbin{X} (\nabla a) = \operatorname{dev}\operatorname{conv} a = \nabla^{2X} a,$$

wo ∇^{2X} ein deviatorischer Operatorkern mit skalarer Multiplikation ist, der in Komponenten zerlegt lautet:

$$(416) \qquad \nabla^{2X} = \alpha L_1 \frac{\partial^2}{\partial r_1{}^2} + \text{cycl.} + 2\beta J_1 \frac{\partial^2}{\partial r_2\,\partial r_3} + \text{cycl.}$$

Bei Differenzierung eines Vektors sind folgende Operatoren zweiten Grades wichtig:

1°:

$$(417) \qquad \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) = \operatorname{conv}\operatorname{conv}\mathbf{a} = \nabla^{2\llcorner}\mathbf{a} \qquad \text{(nach (173c))}$$

2°:

$$(418) \qquad \nabla\times(\nabla\cdot\mathbf{a}) = \operatorname{rot}\operatorname{conv}\mathbf{a} = 0,$$

da jeder Skalar vektorisch multipliziert Null ergibt.

3°:

$$(419) \qquad \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) = \operatorname{conv}\operatorname{rot}\mathbf{a} = (\nabla\times\nabla)\cdot\mathbf{a} = 0 \qquad \text{(nach (172))}$$

4°:

$$(420) \qquad \nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla^{2\urcorner}\mathbf{a} = \nabla^{2\llcorner}\,\overline{\times]}\,\mathbf{a} \qquad \text{(nach (173b))}$$

5°:

$$(421) \qquad \begin{cases} \nabla^{2}\cdot\mathbf{a} = \nabla^{2\llcorner}\mathbf{a} + \nabla^{2\urcorner}\mathbf{a} \\ \qquad = (\nabla\nabla)\mathbf{a} + (\nabla \urcorner \nabla)\mathbf{a} \end{cases} \text{(nach (161b))} \\ \qquad = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a} + \nabla \urcorner (\nabla\times\mathbf{a}) = \quad \text{(nach (173c und b))} \\ \qquad = \operatorname{conv}\operatorname{conv}\mathbf{a} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}.$$

Diese Gleichung folgt auch aus der Assoziativität von $\times$:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) = (\nabla\times\nabla)\times\mathbf{a}.$$

6° und 7°:

$$\begin{cases} \nabla \mathbin{X} (\nabla\times\mathbf{a}) = \operatorname{dev}\operatorname{rot}\mathbf{a} \\ \nabla\times(\nabla \mathbin{X} \mathbf{a}) = \operatorname{rot}\operatorname{dev}\mathbf{a}. \end{cases}$$

Da nach (187) und (189):

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \mathsf{X} \mathbf{b}) = \mathbf{a} \mathsf{X} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \tfrac{1}{2} (\mathbf{a} \mathsf{X} \mathbf{a}) \times \mathbf{c}$$

ist, so folgt:

(422) $$\text{dev rot } \mathbf{a} = \text{rot dev } \mathbf{a} = \tfrac{1}{2} \nabla^{2 \mathsf{X}} \times \mathbf{a}.$$

8^0:

(423) $$\nabla \mathsf{X} (\nabla \mathsf{X} \mathbf{a}) = \text{dev dev } \mathbf{a} = \nabla^{2\diagdown} \mathbf{a} \qquad \text{(nach 184)}$$

Da nach (177):

$$\mathbf{a} \mathsf{X} (\mathbf{a} \mathsf{X} \mathbf{b}) = \tfrac{1}{6} \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \tfrac{1}{2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}$$

ist, so folgt:

(424) $$\text{dev dev } \mathbf{a} = \tfrac{1}{6} \text{ conv conv } \mathbf{a} + \tfrac{1}{2} \nabla^{2} \cdot \mathbf{a}.$$

Da ferner:

$$\nabla^{2} \cdot \mathbf{a} = \text{conv conv } \mathbf{a} + \text{rot rot } \mathbf{a}$$

ist, so ergibt sich:

(425) $$\text{dev dev } \mathbf{a} = \tfrac{2}{3} \text{ conv conv } \mathbf{a} + \tfrac{1}{2} \text{ rot rot } \mathbf{a}$$

und:

(426a) $$\nabla^{2} \cdot \mathbf{a} = \tfrac{1}{3} \text{ conv conv } \mathbf{a} + \tfrac{1}{2} \text{ rot rot } \mathbf{a} + \text{dev dev } \mathbf{a}.$$

Die letzte Formel folgt auch unmittelbar aus (174), und zwar in der Form:

(426b) $$\nabla^{2} \cdot \mathbf{a} = \tfrac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) + \tfrac{1}{2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \nabla \mathsf{X} (\nabla \mathsf{X} \mathbf{a}) = \text{Conv grad } \mathbf{a}.$$

9^0:

(427) $$\nabla \urcorner (\nabla \mathbf{a}) = \text{Rot grad } \mathbf{a} = 0 \qquad \text{(nach (169))}$$

10^0:

(428) $$\nabla (\nabla \urcorner \mathbf{a}) = \text{Conv Rot } \mathbf{a} = 0 \qquad \text{(nach (170))}.$$

Sondern wir die Operatoren, die stets Null ergeben, aus, so bleiben folgende:

Auf Skalare wirkend:

(412), (413) $$\begin{cases} \nabla^{2} \cdot \cdot = (\nabla^{2\llcorner} + \nabla^{2\urcorner}) \,\bar{\cdot} = (\tfrac{1}{3} \nabla^{2\llcorner} + \tfrac{1}{2} \nabla^{2\urcorner} + \nabla^{2\diagdown}) \,\bar{\cdot} \\ \qquad = \text{conv conv} \end{cases}$$

(415) $$\nabla^{2 \mathsf{X}} \cdot = \text{dev conv}.$$

Auf Vektoren wirkend:

(417) $$\nabla^{2\llcorner} \lfloor^{\times} = \text{conv conv}$$

(420) $$\nabla^{2\urcorner} \lfloor^{\times} = \text{rot rot}$$

(423) $$\nabla^{2\diagdown} \lfloor^{\times} = \text{dev dev}$$

(413), (421), (426) $$\begin{cases} \nabla^{2} \cdot = \text{conv conv} + \text{rot rot} = \text{Conv grad} \\ \quad = \tfrac{1}{3} \text{ conv conv} + \tfrac{1}{2} \text{ rot rot} + \text{dev dev} \end{cases}$$

(422) $$\nabla^{2 \mathsf{X}} \times = 2 \text{ dev rot} = 2 \text{ rot dev}.$$

Die Gleichungen (421) und (426) gestatten den Differentialoperator zweiter Ordnung ∇^2, wirkend auf einen Vektor, in vollkommen sym-

metrischer Weise zu zerlegen, entweder nur in die zwei Differentialoperatoren zweiten Grades conv conv und rot rot der Analysis erster Ordnung oder in die drei Differentialoperatoren zweiten Grades conv conv, rot rot und dev dev der Analysis zweiter Ordnung. Jedesmal erscheinen die Quadrate der Ordnungskonstanten als Koeffizienten, also im ersten Falle 1, 1, im zweiten Falle α^2, β^2, 1. Es ist ausdrücklich zu betonen, daß diese symmetrische Zerlegung, die als der Anfang einer sich in die höheren Analysen erstreckenden Gesetzmäßigkeit zu betrachten ist, nur erreicht wird, wenn wir $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -1$ setzen. Denn setzen wir, der herkömmlichen Vektoranalysis gemäß, $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = +1$, so entsteht statt (421):

$$\nabla^2 \cdot \mathbf{a} = -\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a},$$

und es erscheint hier also gerade die gebräuchliche Voraussetzung als diejenige, die die Analysis mit unnötigen und symmetriezerstörenden Minuszeichen belastet.

Die wichtigsten auf Affinoren wirkenden Differentialoperatoren zweiten Grades sind:

1.

(429) $$\nabla(\nabla \mathbf{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{Conv} \mathbf{A} = \nabla^{2\llcorner} \mathbf{A} \qquad \text{(nach (237))}$$

2.

(430) $$\nabla \urcorner (\nabla \urcorner \mathbf{A}) = \operatorname{Rot} \operatorname{Rot} \mathbf{A} = \nabla^{2\urcorner} \mathbf{A}$$

3.

(431) $$\begin{aligned} \nabla^2 \cdot \mathbf{A} &= \nabla^{2\llcorner} \mathbf{A} + \nabla^{2\urcorner} \mathbf{A} \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{Conv} \mathbf{A} + \operatorname{Rot} \operatorname{Rot} \mathbf{A} \qquad \text{(nach (243)}^{1)}\text{)} \end{aligned}$$

4.

(432) $$\nabla(\nabla \urcorner \mathbf{A}) = \operatorname{Conv} \operatorname{Rot} \mathbf{A} = 0 \qquad \text{(nach (239))}.$$

Anwendung von $\nabla^2 \cdot$ auf Summen und Produkte. Für Summen von Größen beliebiger Ordnung gilt

(433) $$\nabla^2 \cdot (\Phi + \Psi) = \nabla^2 \cdot \Phi + \nabla^2 \cdot \Psi.$$

Folgende Formeln geben die Wirkung von $\nabla^2 \cdot$ auf verschiedene Produkte:

(434) $$\begin{aligned} \nabla^2 \cdot (ab) &= \nabla \cdot \{\nabla (ab)\} = \nabla \cdot \{\nabla a b + a \nabla b\} \\ &= \nabla^2 \cdot a b + a \nabla^2 \cdot b + 2 \nabla a \cdot \nabla b \end{aligned}$$

(435) $$\begin{aligned} \nabla^2 \cdot (a\mathbf{b}) &= \nabla \{\nabla (a\mathbf{b})\} = \nabla \{\nabla a \mathbf{b} + a \nabla \mathbf{b}\} \\ &= \nabla^2 \cdot a \mathbf{b} + a \nabla^2 \cdot \mathbf{b} + 2 \nabla a \nabla \mathbf{b} \end{aligned}$$

---

1) Eine Zerlegung von $\nabla^2 \cdot \mathbf{A}$ in drei Teile ist erst innerhalb der Analysis dritter Ordnung möglich. (Vgl. S. 202 u. f.)

$$(436)\qquad \nabla^2\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \nabla\cdot\{\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\} = \nabla\cdot\{\nabla\mathbf{a}\mathbf{b}+\nabla\mathbf{b}\mathbf{a}\}$$
$$= \nabla^2\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\nabla^2\cdot\mathbf{b}+2(\nabla\mathbf{a})_k\,\overline{|\cdot|}\,\nabla\mathbf{b} \qquad (221)$$

$$(437)\qquad \nabla^2\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \nabla\{\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\} = \nabla\{(\nabla\mathbf{a})\rceil\,\mathbf{b}-(\nabla\mathbf{b})\rceil\,\mathbf{a}\}$$
$$= \nabla^2\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\nabla^2\cdot\mathbf{b}+2(\nabla\mathbf{a})_k\,\overline{\times}\!\rceil(\nabla\mathbf{b}) \qquad (216)$$

$$(438)\qquad \nabla^2\cdot(\mathbf{a}\mathbin{\mathsf{X}}\mathbf{b}) = \nabla^2\cdot\mathbf{a}\mathbin{\mathsf{X}}\mathbf{b}+\mathbf{a}\mathbin{\mathsf{X}}\nabla^2\cdot\mathbf{b}+2(\nabla\mathbf{a})_k\,\overline{\mathsf{X}}\!\rceil\,(\nabla\mathbf{b})\text{ [1]}$$

$$(439)\qquad \nabla^2\cdot(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \nabla^2\cdot\mathbf{a}\mathbf{b}+\mathbf{a}\nabla^2\cdot\mathbf{b}+2(\nabla\mathbf{a})_k(\nabla\mathbf{b})\text{ [1]}$$

$$(440)\qquad \nabla^2\cdot(\mathbf{A}\mathbf{b}) = \nabla^2\cdot\mathbf{A}\mathbf{b}-\mathbf{A}\nabla^2\cdot\mathbf{b}+2\nabla\{(\nabla\mathbf{b})\mathbf{A}_k\}\text{ [1]}.$$

Flächen- und Linienintegrale. Es sei Φ eine geometrische Größe beliebiger Ordnung und $-\!\!\circ$ eine beliebige Multiplikation. Es soll das Flächenintegral

$$\int_\sigma \mathbf{n} -\!\!\circ\, \Phi\, d\sigma,$$

wo $d\sigma$ ein Flächenelement und $\mathbf{n}$ der auf diesem Element senkrechte, nach der Außenseite der Fläche gerichtete Einheitsvektor ist, über eine geschlossene Fläche σ, und das Linienintegr

$$\int_s d\mathbf{s} -\!\!\circ\, \Phi,$$

wo $d\mathbf{s}$ ein Linienelement ist, über eine geschlossene Linie s allgemein bestimmt werden.

Es sei $OABC$, $OA = dr_1$, cycl. ein Differentialraumelement und Φ der Wert der geometrischen Größe in O (Fig. 15). Der Wert dieser Größe in dem Schwerpunkte des Dreiecks OBC ist dann

$$\Phi + \frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial r_2}dr_2 + \frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial r_3}dr_3.$$

Ähnliches gilt für die Dreiecke OCA und OAB. Der Wert in dem Schwerpunkte des Dreiecks ABC ist:

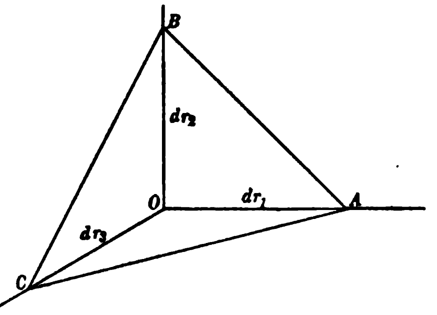


Fig. 15 Differentialtetraeder.

$$\Phi + \frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial r_1}dr_1 + \frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial r_2}dr_2 + \frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial r_3}dr_3.$$

Die Oberflächenintegrale über die vier Begrenzungsebenen des Raumelements $OABC$ sind also:

---

1) Eine direkte Ableitung dieser Formeln würde Multiplikationen dritter Ordnung erfordern. Der Beweis erfordert also innerhalb der Affinoranalysis Einführung eines Hilfsvektors oder Zerlegung in Komponenten. Vgl. 11.4 und 12.3 S. 101 f.

$$OBC: -\left(\frac{1}{2}\mathfrak{i}_1 dr_2 dr_3\right) \multimap \left(\Phi + \frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial r_2}dr_2 + \frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial r_3}dr_3\right)$$

cycl.

$$ABC: \left(\frac{1}{2}\mathfrak{i}_1 dr_2 dr_3 + \text{cycl.}\right) \multimap \left(\Phi + \frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial r_1}dr_1 + \text{cycl.}\right),$$

und das totale Oberflächenintegral ist demnach:

$$\frac{1}{6}dr_1 dr_2 dr_3\left\{\mathfrak{i}_1 \multimap \frac{\partial\Phi}{\partial r_1} + \mathfrak{i}_2 \multimap \frac{\partial\Phi}{\partial r_2} + \mathfrak{i}_3 \frac{\partial\Phi}{\partial r_3}\right\} = d\tau\nabla \multimap \Phi,$$

wo $d\tau$ den Inhalt des Differentialraumelementes $OABC$ darstellt.

Nimmt man das Flächenintegral über eine endliche geschlossene Fläche, so ist es gleich der Summe der Flächenintegrale über die Begrenzungsflächen sämtlicher innerhalb der Fläche gelegener Raumelemente, da die Integrale über alle aneinanderschließenden Flächen zweimal mit entgegengesetztem Vorzeichen vorkommen und sich demnach aufheben. Es ist also allgemein

$$\int_\sigma \mathfrak{n} \multimap \Phi d\sigma = \int_\tau \nabla \multimap \Phi d\tau, \tag{441}$$

wo σ eine beliebige geschlossene Fläche und τ der eingeschlossene Raum ist. Der Wert von $\nabla \multimap \Phi$ für irgendeinen Punkt P des Feldes Φ ist gegeben durch die Gleichung

$$\nabla \multimap \Phi = \text{Lim}_{\tau_p = 0}\frac{1}{\tau_p}\int_{\sigma_p}\mathfrak{n} \multimap \Phi d\sigma, \tag{442}$$

wo τ_p ein Raumelement um P ist. Daraus ergibt sich als die von jedem Koordinatensystem freie Definition des Operators $\nabla \multimap$:

$$\nabla \multimap = \text{Lim}_{\tau = 0}\frac{1}{\tau}\int_\sigma d\sigma\,\mathfrak{n} \multimap. \tag{443}$$

Der Wert der Feldgröße in der Mitte der Seiten des Dreiecks ABC ist:

$$\text{Seite } AB: \ \Phi + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial r_1}dr_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial r_2}dr_2$$

cycl.

Das Linienintegral um das Dreieck ABC ist also:

$$\mathfrak{i}_1 \multimap \left(\frac{1}{2}dr_1 dr_3\frac{\partial\Phi}{\partial r_3} - \frac{1}{2}dr_1 dr_2\frac{\partial\Phi}{\partial r_2}\right) + \text{cycl.}$$

$$= \left(\frac{1}{2}dr_1 dr_3\frac{\partial}{\partial r_3} - \frac{1}{2}dr_1 dr_2\frac{\partial}{\partial r_2}\right)\mathfrak{i}_1 \multimap \Phi + \text{cycl.}$$

$$= (\mathfrak{n} \times \nabla) \multimap \Phi d\sigma,$$

wo $d\sigma$ den Inhalt von ABC darstellt, und $\mathfrak{n}$ den auf ABC senkrechten

Einheitsvektor, dessen Richtung der Drehrichtung ABC vermittels einer Rechtsschraube zugeordnet ist.

Nimmt man das Linienintegral über eine endliche geschlossene Linie, so ist es gleich der Summe der Linienintegrale über die Begrenzungslinien sämtlicher Differentialflächenelemente eines durch die Linie einmalig begrenzten im übrigen aber beliebigen Flächenteils. Denn die Integrale über alle aneinanderschließenden Linien kommen zweimal mit entgegengesetztem Vorzeichen vor und heben sich demnach auf. Es ist also allgemein:

$$\int_s d\mathbf{s} \multimap \Phi = \int_\sigma (\mathbf{n} \times \nabla) \multimap \Phi \, d\sigma, \tag{444}$$

wo s eine beliebige geschlossene Linie und σ ein durch diese Linie einmalig begrenzter, im übrigen aber beliebiger Flächenteil. Die Richtung der Integration beim Linienintegral und die Richtung der Normalen $\mathbf{n}$ sind einander vermittels einer Rechtsschraube zugeordnet.

Existieren zwei Multiplikationen $\overset{1}{\multimap}$ und $\overset{2}{\multimap}$, die für Größen derselben Orientierungsweise wie Φ allgemein die Assoziationsänderung

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \multimap \Phi = \mathbf{a} \overset{1}{\multimap} (\mathbf{b} \overset{2}{\multimap} \Phi)$$

gestatten, wo $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ beliebige Vektoren sind, so ist

$$\int_s d\mathbf{s} \multimap \Phi = \int_\sigma \mathbf{n} \overset{1}{\multimap} (\nabla \overset{2}{\multimap} \Phi) \, d\sigma. \tag{445}$$

Formel (442) gibt Anlaß zur Bildung folgender für die Affinoranalysis wichtiger Gleichungen:

$$\int_\sigma \mathbf{n} p \, d\sigma = \int_\tau \nabla p \, d\tau \tag{446}$$

$$\int_\sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot \mathbf{a} \, d\tau \quad \text{(Satz von Gauß)} \tag{447}$$

$$\int_\sigma \mathbf{n} \times \mathbf{a} \, d\sigma = \int_\tau \nabla \times \mathbf{a} \, d\tau \tag{448}$$

$$\int_\sigma \mathbf{n} \mathsf{X} \mathbf{a} \, d\sigma = \int_\tau \nabla \mathsf{X} \mathbf{a} \, d\tau \tag{449}$$

$$\int_\sigma \mathbf{n} \mathbf{a} \, d\sigma = \int_\tau \nabla \mathbf{a} \, d\tau \tag{450}$$

$$\int_\sigma \mathbf{n} \mathbf{A} \, d\sigma = \int_\tau \nabla \mathbf{A} \, d\tau \tag{451}$$

$$\int_\sigma \mathbf{n} \urcorner \mathbf{A} \, d\sigma = \int_\tau \nabla \urcorner \mathbf{A} \, d\tau. \tag{452}$$

Daneben können wir aus Formel (444) erhalten:

$$\int_s d\mathbf{s} p = \int_\sigma (\mathbf{n} \times \nabla) p \, d\sigma = \int_\sigma \mathbf{n} \times (\nabla p) \, d\sigma \tag{453}$$

$$(454)\quad \int_s d\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{a} = \int_\sigma (\mathfrak{n}\times\nabla)\cdot\mathfrak{a}\,d\sigma = \int_\sigma \mathfrak{n}\cdot(\nabla\times\mathfrak{a})\,d\sigma \quad \text{(nach (172)) (Satz v. Stokes)}$$

$$(455)\quad \int_s d\mathfrak{s}\times\mathfrak{a} = \int_\sigma (\mathfrak{n}\times\nabla)\times\mathfrak{a}\,d\sigma = \int_\sigma \mathfrak{n}\,\overline{\times}\!\urcorner(\nabla\mathfrak{a})\,d\sigma = \int_\sigma \mathfrak{n}(\nabla\urcorner\mathfrak{a})\,d\sigma \quad \text{(nach (173 b))}$$

$$(456)\quad \int_s d\mathfrak{s}\;\mathsf{X}\;\mathfrak{a} = \int_\sigma (\mathfrak{n}\,\dot{\times}\,\nabla)\;\mathsf{X}\;\mathfrak{a}\,d\sigma = \int_\sigma \mathfrak{n}\,\overline{\mathsf{X}}\!\urcorner(\nabla\mathfrak{a})\,d\sigma \quad \text{(nach (186 b))[1]}$$

$$(457)\quad \int_s d\mathfrak{s}\mathfrak{a} = \int_\sigma (\mathfrak{n}\times\nabla)\mathfrak{a}\,d\sigma = \int_\sigma \mathfrak{n}\urcorner(\nabla\mathfrak{a})\,d\sigma \quad \text{(nach (167))}$$

$$(458)\quad \int_s d\mathfrak{s}\mathbf{A} = \int_\sigma (\mathfrak{n}\times\nabla)\mathbf{A}\,d\sigma = \int_\sigma \mathfrak{n}(\nabla\urcorner\mathbf{A})\,d\sigma \quad \text{(nach (239))}.$$

Ist p bzw. $\mathfrak{a}$ eine eindeutige kontinuierliche Funktion des Ortsvektors, so ist nach (339):

$$dp = d\mathfrak{r}\cdot\frac{dp}{d\mathfrak{r}} = -\,d\mathfrak{r}\nabla p$$

bzw. nach (346):

$$d\mathfrak{a} = d\mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{a}}{d\mathfrak{r}\lfloor\!\underline{\times}} = -\,d\mathfrak{r}\nabla\mathfrak{a}.$$

Fig. 16. Integrationsweg.

Das Linienintegral

$$\int_A^B d\mathfrak{s}\cdot\nabla p \quad \text{bzw.} \quad \int_A^B d\mathfrak{s}(\nabla\mathfrak{a}) \quad \text{(Fig. 16)}$$

ist also in beiden Fällen unabhängig vom Integrationsweg und gleich der Differenz zwischen den Werten der Feldgröße in A und in B:

$$\int_A^B d\mathfrak{s}\nabla p = p_A - p_B$$

$$\int_A^B d\mathfrak{s}\nabla\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_A - \mathfrak{a}_B.$$

Das Linienintegral von ∇p bzw. $\nabla\mathfrak{v}$ mit der Multiplikation $\cdot$ bzw. $\lfloor\!\underline{\times}$ über eine geschlossene Kurve ist also gleich Null, was sich auch aus der aus (454) bzw. (458) hervorgehenden Gleichung:

$$(459)\begin{cases} \text{(a)} & \int_s d\mathfrak{s}\cdot\nabla p = \int_\sigma (\mathfrak{n}\times\nabla)\cdot(\nabla p)\,d\sigma = \int_\sigma \mathfrak{n}\cdot\{\nabla\times(\nabla p)\}\,d\sigma = 0 \\ & \text{bzw.:} \\ \text{(b)} & \int_s d\mathfrak{s}\nabla\mathfrak{a} = \int_\sigma (\mathfrak{n}\times\nabla)(\nabla\mathfrak{a})\,d\sigma = \int_\sigma \mathfrak{n}\{\nabla\urcorner(\nabla\mathfrak{a})\}\,d\sigma = 0 \end{cases}$$

ergibt und sich in der Regel aussprechen läßt:

1) Wenn dev $\mathfrak{r}' = o$, so stellt $\mathfrak{r}' = f(\mathfrak{r})$ eine konforme Abbildung dar. Beschränken wir die Betrachtung auf eine Ebene, so hat (456) dieselbe Bedeutung wie der erste Satz von Cauchy der Funktionentheorie.

Regel: Das Linienintegral des totalen Differentialquotienten eines eindeutigen kontinuierlichen Feldes, mit der zugehörigen Multiplikation, ist über jede geschlossene Kurve des Feldes gleich Null.

Umgekehrt läßt sich jedes eindeutige kontinuierliche Vektor- oder Affinorfeld $\mathbf{v}$ bzw. $\mathbf{A}$, für das $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ bzw. $\operatorname{Rot}\mathbf{A}$ im ganzen Feld Null ist, und in dem also das skalare bzw. vektordyadische Linienintegral der Feldgröße für jede geschlossene Kurve verschwindet (459), als Differentialfeld eines Skalar- bzw. Vektorfeldes auffassen. Um dies einzusehen gebe man einem bestimmten Punkt P den Nullwert und bestimme man für jeden anderen Punkt P den Wert der Linienintegrale

$$\int_Q^P d\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} \quad \text{bzw.} \quad \int_Q^P d\mathbf{r}\,\mathbf{A}.$$

Das in dieser Weise entstehende Skalar- bzw. Vektorfeld hat das ursprüngliche Feld als Differentialfeld.

Theorie der Felder. Die Integralrechnung der Größen höherer Ordnung bezweckt allgemein das Auffinden irgendeiner Funktion einer einfachen Größe höherer Ordnung, wenn einer ihrer totalen Differentialquotienten nach dieser Größe, oder auch Teile dieser Differentialquotienten in Verbindung mit anderen Bedingungen gegeben sind. Wir wollen diese Aufgabe nur insofern berühren, als die unabhängig veränderliche Größe der Ortsvektor ist, es sich also darum handelt, ein Feld zu bestimmen, von dem Differentialfelder und Randbedingungen gegeben sind.

Ist das totale Differentialfeld im ganzen Raum gegeben, so läßt sich die Aufgabe zunächst in derselben Weise lösen, wie die korrespondierende in der gewöhnlichen Skalaranalysis. Ist p ein Skalar, Funktion eines anderen Skalars t, und Φ eine beliebige geometrische Größe, Funktion des Ortsvektors $\mathbf{r}$, so ist:

$$\begin{aligned} p &= \int dt\,\frac{dp}{dt} + c \\ \Phi &= \int d\mathbf{r}\,\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}} + \mathfrak{P}_c, \end{aligned} \tag{460}$$

wo c und $\mathfrak{P}_c$ unbestimmte konstante Größen. Ist die abhängig Veränderliche für einen bestimmten Wert von t bzw. $\mathbf{r}$ gegeben, so gestatten die Integrale ihre Bestimmung für jeden anderen Wert, wobei zu beachten ist, daß der Integrationsweg beliebig gewählt werden darf (vgl. S. 180). Bei Feldern tritt nun aber auch noch eine andere Integrationsmethode in den Vordergrund, bei der Raumintegrale statt Linienintegralen verwendet werden.

Zerlegung eines Vektorfeldes. Ist ein wirbelfreies Feld gegeben, so läßt sich in der S. 180 angegebenen Weise stets ein Skalarfeld bestimmen, so daß

$$\mathbf{v} = \nabla p.$$

Da $-\nabla p$ das totale Differentialfeld von p ist, ist das Feld bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Ist ein stetiges quellenfreies Feld $\mathbf{v}$ gegeben, so läßt sich ebenso stets ein Vektorfeld $\mathbf{a}$ bestimmen, sodaß

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{a}$$

ist, etwa, indem man nach Liebmann

$$\mathbf{a} = \frac{1}{r_m} \int_0^{\mathbf{r}} s_m \mathbf{v} \times d\mathbf{s}$$

setzt, wobei die Integration über den Radiusvektor von $\mathbf{s} = 0$ bis $\mathbf{s} = \mathbf{r}$ zu erstrecken ist.[1])

Eine andere Lösung ergibt sich nach Bjerknes aus folgender Betrachtung.[2]) Sind p und q zwei Skalarfelder, deren voneinander um 1 (in p bzw. q gemessen) entfernte äquiskalare Flächen zusammen die Einheitsstromröhren von $\mathbf{v}$ bilden, so ist, wie leicht ersichtlich,

$$\mathbf{v} = \pm \operatorname{conv} p \times \operatorname{conv} q$$

also nach (375):

$$\mathbf{v} = \pm \operatorname{rot} (p \operatorname{conv} q).$$

Es sei nun ein Vektorfeld gegeben, das innerhalb eines einfach zusammenhängenden Raumes stetig und auf der Begrenzungsfläche dieses Raumes Null ist. Wir betrachten nur den Teil innerhalb der Fläche und nennen diesen Teil ein endliches stetiges Feld. Die Stromlinien eines solchen Feldes befinden sich nur innerhalb der umschließenden Fläche. Die Stromlinien, die von der Umrandung irgendeines Differentialflächenelements im Feld ausgehen, bilden eine Röhre, die von der Strömung nicht durchbrochen werden kann. Eine solche Röhre kann also, da das Feld endlich ist, entweder in einer Differentialquelle entstehen und in einer Differentialsenke enden, oder in sich selbst zurücklaufen. Im ersten Falle besitzt das Feld aber Senken, im zweiten Wirbel. Denn das Linienintegral des Feldvektors über eine Linie der in sich zurücklaufenden Röhre ist sicher nicht Null, und da nach (454)

$$\int_s d\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} = \int_\sigma \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\sigma$$

ist, so ist also der Wert von rot $\mathbf{v}$ sicher über keinem ganzen durch die

1) 08.9. 2) 09.20, S. 94.

Linie umrandeten Flächenteil gleich Null. Da aber der Teil des Raumes, innerhalb dessen wir das Feld betrachten, nach Voraussetzung nur einfach zusammenhängend ist (also z. B. kein Ringkörper), liegt jedenfalls irgend ein solcher Flächenteil ganz innerhalb des Feldes, und sind demnach in letzterem sicher irgendwo Wirbel vorhanden.

Ist also für ein endliches stetiges Feld $\mathfrak{v}$

$$\begin{cases} \operatorname{con} \mathfrak{v} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0, \end{cases}$$

so ist das Feld sicher Null. Ist von einem ebensolchen wirbelfreien Feld $\mathfrak{v}$ das Senkenfeld gegeben:

$$\operatorname{con} \mathfrak{v} = q,$$

so ist $\mathfrak{v}$ dadurch eindeutig bestimmt, denn, gäbe es noch ein zweites Feld $\mathfrak{v}'$, das diesen Bedingungen genügte, so wäre

$$\operatorname{conv} (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}') = 0$$

$$\operatorname{rot} (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}') = 0,$$

also:

$$\mathfrak{v} - \mathfrak{v}' = 0.$$

In derselben Weise ist ein endliches stetiges quellenfreies Feld durch Angabe seines Wirbelfeldes vollständig bestimmt, und ebenso ein allgemeines stetiges endliches Feld durch Angabe seines Senken- und Wirbelfeldes.

Jedes endliche stetige Feld ist demnach in einer und nur einer Weise in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Bestandteil zu zerlegen. Da aber der erste Bestandteil sich angeben läßt als

$$\operatorname{conv} p,$$

der zweite als

$$\operatorname{rot} \mathfrak{a},$$

kann jedes endliche stetige Feld geschrieben werden als:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_q + \mathfrak{v}_w = \operatorname{conv} p + \operatorname{rot} \mathfrak{a} \tag{461}$$

und zwar nur in einer Weise. (Vgl. S. 187.)[1])

Das endliche stetige Skalarfeld und seine skalar abgeleiteten Felder. Es sei ein endliches stetiges skalares Feld gegeben:

$$p = f(\mathfrak{r}) \tag{462a}$$

1) Für einen koordinatenfreien vektoranalytischen Beweis dieses Satzes, der nicht von der Deutung des Feldes als Strömungsfeld Gebrauch macht, siehe P. Burgatti 10. 9.

in einem Raumteil τ, begrenzt durch eine Fläche σ. Der negative vollständige Differentialquotient bildet ein Vektorfeld

$$\mathbf{v} = -\frac{dp}{d\mathbf{r}} = \nabla \cdot p = \operatorname{conv} p, \tag{462b}$$

das infolge von (418) wirbelfrei ist. Die Senken von $\mathbf{v}$ sind gegeben durch:

$$q = \operatorname{conv} \mathbf{v} = \operatorname{conv} \operatorname{conv} p = \nabla^2 \cdot p. \tag{462c}$$

Sie bilden ein skalares Feld. Es sei schließlich $\mathbf{s}$ das Gradientfeld des Senkenfeldes:

$$\mathbf{s} = \operatorname{conv} q = \operatorname{conv} \operatorname{conv} \mathbf{v} = \nabla^2 \cdot \mathbf{v} = \operatorname{conv} \operatorname{conv} \operatorname{conv} p. \tag{462d}$$

Auch die Felder $\mathbf{v}$, q, $\mathbf{s}$ usw. seien stetig und auf σ Null.

Das Feld p ist vollständig durch sein Gradientfeld $\mathbf{v}$ bestimmt, da die Integrationskonstante der Randbedingung wegen fortfällt. Ebenso ist $\mathbf{v}$ als wirbelfreies Feld durch sein Senkenfeld vollständig bestimmt. Jedes der vier Felder läßt sich also als eindeutige Funktion jedes anderen angeben. Wir wollen nun diese Funktionen bestimmen.

Da $\mathbf{v}$ durch q eindeutig bestimmt ist, genügt es, eine Lösung anzugeben. Diese ist dann zugleich die einzige. Wäre nur eine einzige Differentialsenke $q\,d\tau$ vorhanden, in einem Punkte P, so wäre das Feld $\mathbf{v}$ in einem Punkte Q in einer Entfernung $\mathbf{a}$ von P gleich:

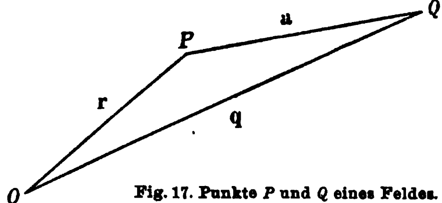


Fig. 17. Punkte P und Q eines Feldes.

$$-\frac{q\,d\tau}{4\pi a_m^3}\mathbf{a}. \quad \text{(Fig. 17.)}$$

Das Feld $\mathbf{v}$ ist also:

$$\mathbf{v} = -\int_\tau \frac{q\,d\tau}{4\pi a_m^3}\mathbf{a}, \tag{463}$$

wobei das Integral über das ganze Feld zu erstrecken ist. Der Teil des Feldes p, der nur von $q\,d\tau$ herrührt, ist offenbar gleich:

$$\frac{q\,d\tau}{4\pi a_m}$$

und das Feld p also:

$$p = \int_\tau \frac{q\,d\tau}{4\pi a_m}. \tag{464a}$$

Um das Feld $\mathbf{v}$ in $\mathbf{s}$ auszudrücken, bemerken wir, daß

$$\nabla^2 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{i}_1 \nabla^2 \cdot v_1 + \mathbf{i}_2 \nabla^2 \cdot v_2 + \mathbf{i}_3 \nabla^2 \cdot v_3 =$$
$$= \mathbf{i}_1 s_1 + \mathbf{i}_2 s_2 + \mathbf{i}_3 s_3$$

ist. Also ist:

$$v_1 = \int_\tau \frac{s_1\, d\tau}{4\pi a_m}$$

und demnach:

(464 b) $$\mathbf{v} = \int_\tau \frac{\mathbf{s}\, d\tau}{4\pi \mathbf{a}}.$$

$\mathbf{v}$ leitet sich also in derselben Weise aus $\mathbf{s}$ ab, wie p aus q und beide Male ist die Integration die Umkehrung des skalaren Differentialoperatorkerns:

$$\nabla^2 \cdot = \left(-\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_3^2}\right)\cdot.$$

Deuten wir diese Umkehrung an durch das Zeichen pot τ (Potential):

(465) $$\mathrm{pot}_\tau \Phi = \int_\tau \frac{\Phi\, d\tau}{4\pi a_m},$$

wo Φ eine beliebige gerichtete Größe ist und der Index τ das Gebiet angibt, innerhalb dessen wir das Feld betrachten, so können wir die Beziehungen der Felder p, $\mathbf{v}$, q, $\mathbf{s}$ zu einander wie folgt angeben:

(466)

	p	$\mathbf{v}$	q	$\mathbf{s}$
p	conv conv pot$_\tau$ p conv pot$_\tau$ conv p pot$_\tau$ conv conv p	conv pot$_\tau$ $\mathbf{v}$ pot$_\tau$ conv $\mathbf{v}$	pot$_\tau$ q	conv pot$_\tau$ pot$_\tau$ $\mathbf{s}$ pot$_\tau$ conv pot$_\tau$ $\mathbf{s}$ pot$_\tau$ pot$_\tau$ conv $\mathbf{s}$
$\mathbf{v}$	conv p	conv conv pot $\mathbf{v}$ conv pot$_\tau$ conv $\mathbf{v}$ pot$_\tau$ conv conv $\mathbf{v}$	conv pot$_\tau$ q pot$_\tau$ conv q	pot$_\tau$ $\mathbf{s}$
q	conv conv p	conv $\mathbf{v}$	conv conv pot$_\tau$ q conv pot$_\tau$ conv q pot$_\tau$ conv conv q	conv pot$_\tau$ $\mathbf{s}$ pot$_\tau$ conv $\mathbf{s}$
$\mathbf{s}$	conv conv conv p	conv conv $\mathbf{v}$	conv q	conv conv pot$_\tau$ $\mathbf{s}$ conv pot$_\tau$ conv $\mathbf{s}$ pot$_\tau$ conv conv $\mathbf{s}$

Der Operator conv, angewandt auf Vektoren und Skalare, und das Funktionszeichen pot$_\tau$ sind hier, wie ersichtlich, kommutativ.

Das quellenfreie endliche stetige Vektorfeld und seine vektorisch abgeleiteten Felder. Es sei jetzt ein in derselben Weise begrenztes endliches stetiges quellenfreies Vektorfeld $\mathbf{a}$ gegeben:

(467 a) $$\mathrm{conv}\, \mathbf{a} = 0.$$

Das Wirbelfeld dieses Feldes

(467 b) $$\mathbf{v} = \text{rot}\,\mathbf{a}$$

ist nach (419) ebenfalls quellenfrei. Ebenso die weiteren vektorisch abgeleiteten Felder:

(467 c) $$\mathbf{w} = \text{rot}\,\mathbf{v} = \text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{a},$$

(467 d) $$\mathbf{z} = \text{rot}\,\mathbf{w} = \text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{v} = \nabla^2\cdot\mathbf{v} = \text{rot}\,\text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{a}.$$

Auch die Felder $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ usw. seien stetig und auf σ Null.

Da ein endliches stetiges quellenfreies Feld durch seine Wirbel eindeutig bestimmt ist, läßt sich wiederum jedes der vier Felder als eindeutige Funktion jedes anderen bestimmen. Da:

$$\mathbf{z} = \nabla^2\cdot\mathbf{v},$$

ist, so folgt:

$$\mathbf{v} = \int_\tau \frac{\mathbf{z}\,d\tau}{4\pi a_m}\,d\tau = \text{pot}_\tau\,\mathbf{z},$$

und ebenso:

$$\mathbf{a} = \int_\tau \frac{\mathbf{w}\,d\tau}{4\pi a_m}\,d\tau = \text{pot}_\tau\,\mathbf{w}.$$

Die Beziehungen der Felder $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ zueinander lassen sich also wie folgt angeben:

(468)

	$\mathbf{a}$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{w}$	$\mathbf{z}$
$\mathbf{a}$	rot rot pot_τ $\mathbf{a}$ rot pot_τ rot $\mathbf{a}$ pot_τ rot rot $\mathbf{a}$	rot pot_τ $\mathbf{v}$ pot_τ rot $\mathbf{v}$	pot_τ $\mathbf{w}$	rot pot_τ pot_τ $\mathbf{z}$ pot_τ rot pot_τ $\mathbf{z}$ pot_τ pot_τ rot $\mathbf{z}$
$\mathbf{v}$	rot $\mathbf{a}$	rot rot pot_τ $\mathbf{v}$ rot pot_τ rot $\mathbf{v}$ pot_τ rot rot $\mathbf{v}$	rot pot_τ $\mathbf{w}$ pot_τ rot $\mathbf{w}$	pot_τ $\mathbf{z}$
$\mathbf{w}$	rot rot $\mathbf{a}$	rot $\mathbf{v}$	rot rot pot_τ $\mathbf{w}$ rot pot_τ rot $\mathbf{w}$ pot_τ rot rot $\mathbf{w}$	rot pot_τ $\mathbf{z}$ pot_τ rot $\mathbf{z}$
$\mathbf{z}$	rot rot rot $\mathbf{a}$	rot rot $\mathbf{v}$	rot $\mathbf{w}$	rot rot pot_τ $\mathbf{z}$ rot pot_τ rot $\mathbf{z}$ pot_τ rot rot $\mathbf{z}$

Auch der Operator rot, angewandt auf Vektoren, ist hier mit dem Funktionszeichen pot_τ kommutativ.

Die Zerlegung eines endlichen stetigen Vektorfeldes. Das allgemeine endliche stetige Vektorfeld ist vollständig bestimmt durch sein Senken- und Wirbelfeld zusammen. Da das Senkenfeld ein Feld bestimmt:

$$\mathbf{v}_q = \operatorname{conv} \int_\tau \frac{\operatorname{conv} \mathbf{v}}{4\pi a_m} d\tau = \operatorname{conv} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{conv} \mathbf{v} \tag{469}$$

und das Wirbelfeld ein Feld:

$$\mathbf{v}_w = \operatorname{rot} \int_\tau \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{4\pi a_m} d\tau = \operatorname{rot} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{rot} \mathbf{v}, \tag{470}$$

ist:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_w = \operatorname{conv} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{conv} \mathbf{v} + \operatorname{rot} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{rot} \mathbf{v} \tag{471}$$

die gesuchte und einzige Zerlegung des Feldes in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Bestandteil. Sowohl $\mathbf{v}_q$ als $\mathbf{v}_w$ erstrecken sich einzeln auch außerhalb σ und sind im allgemeinen auf σ nicht Null. (Vgl. S. 190).

Das endliche unstetige Skalar- und Vektorfeld. Lassen wir die Bedingung der Stetigkeit fallen, so treten in den Unstetigkeitsflächen bei einem Skalarfeld Flächengradienten und bei einem Vektorfeld Flächensenken und -wirbel auf. Es sei $\mathbf{n}$ die Einheitsnormale in einem Punkt P einer Unstetigkeitsfläche μ, p_a bzw. $\mathbf{v}_a$ der Wert der Feldgröße in P auf der Seite von $\mathbf{n}$, und p_i bzw. $\mathbf{v}_i$ der Wert in P auf der anderen Seite. Betrachtet man dann die Unstetigkeitsfläche als Grenzfall einer Schicht, so berechnet sich die Stärke des Gradienten bzw. der Senke und des Wirbels in P zu:

$$\mathbf{n}(p_a - p_i) d\mu$$

bzw.:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_i) d\mu,$$
$$\mathbf{n} \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_i) d\mu.$$

Diese Gradienten, Senken und Wirbel sind offenbar genau wie gewöhnliche Gradienten, Senken und Wirbel zu behandeln. Statt

(Teil von 466) $\qquad p = \operatorname{conv} p \operatorname{pot}_\tau \operatorname{conv} p$

bzw. (471) bekommen wir also die Formeln:

$$p = \operatorname{conv} \int_\tau \frac{\operatorname{conv} p}{4\pi a_m} d\tau + \operatorname{conv} \int_\mu \frac{\mathbf{n}(p_a - p_i)}{4\pi a_m} d\mu \tag{472}$$

bzw.:

$$\mathbf{v} = \operatorname{conv} \int_\tau \frac{\operatorname{conv} \mathbf{v}}{4\pi a_m} d\tau + \operatorname{conv} \int_\mu \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_i)}{4\pi a_m} d\mu \tag{473}$$
$$+ \operatorname{rot} \int_\tau \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{4\pi a_m} d\tau + \operatorname{rot} \int_\mu \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_i)}{4\pi a_m} d\mu,$$

wo die Raumintegrale sich über den Raum τ unter Ausschließung aller Unstetigkeitsflächen, die Flächenintegrale sich nur über letztere erstrecken.

In dem Falle, wo die Unstetigkeiten sich nur auf der Begrenzungsfläche befinden, wird p_a bzw. $\mathfrak{v}_a$ allgemein zu Null, und (472) bzw. (473) gehen über in:

(474) $$p = \operatorname{conv} \int\limits_\tau \frac{\operatorname{conv} p}{4\pi a_m} d\tau - \operatorname{conv} \int\limits_\sigma \frac{\mathfrak{n} p}{4\pi a_m} d\sigma$$

bzw.:

(475) $$\mathfrak{v} = \operatorname{conv} \int\limits_\tau \frac{\operatorname{conv} \mathfrak{v}}{4\pi a_m} d\tau - \operatorname{conv} \int\limits_\sigma \frac{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}}{4\pi a_m} d\sigma$$
$$+ \operatorname{rot} \int\limits_\tau \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{v}}{4\pi a_m} d\tau - \operatorname{rot} \int\limits_\sigma \frac{\mathfrak{n} \times \mathfrak{v}}{4\pi a_m} d\sigma.$$

Es ist zu beachten, daß in den letzten vier Formeln nicht mehr gilt:

$$\int\limits_\tau \frac{\operatorname{conv} p}{4\pi a_m} d\tau = \operatorname{pot}_\tau \operatorname{conv} p,$$

$$\int\limits_\tau \frac{\operatorname{conv} \mathfrak{v}}{4\pi a_m} d\tau = \operatorname{pot}_\tau \operatorname{conv} \mathfrak{v},$$

$$\int\limits_\tau \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{v}}{4\pi a_m} d\tau = \operatorname{pot}_\tau \operatorname{rot} \mathfrak{v},$$

da bei der Bildung des Potentials die Integration sich über den ganzen Raum τ zu erstrecken hat. Eine Potentialbildung im oben angegebenen Sinne ist also hier, wo Unstetigkeiten auftreten, nicht mehr möglich (vgl. S. 190).

Die Zerlegung (475) ist die einzige, vorausgesetzt, daß man die Flächensenken und Wirbel als Grenzfälle gewöhnlicher Senken und Wirbel auffaßt, und die vier Teilfelder auch außerhalb σ betrachtet. Dann bestimmen die ersten zwei Teile in der Tat den einzigen wirbelfreien und die letzten zwei den einzigen quellenfreien Bestandteil. Betrachtet man aber nur den Teil innerhalb σ, so sind sowohl der zweite als der vierte Bestandteil quellen- und wirbelfrei. Die Zerlegung ist demnach nicht mehr eindeutig bestimmt.

Im Falle τ, wie angenommen, einfach zusammenhängend ist, ist ein Feld, das weder Senken noch Wirbel innerhalb, noch Flächensenken auf σ besitzt, innerhalb σ sicher null, da eine Differentialstromröhre nirgends enden und auch nicht in sich selbst zurücklaufen könnte. In derselben Weise ist, wenn τ keinen fremden Raum umschließt, ein Feld, das weder Senken noch Wirbel innerhalb, noch Flächenwirbel auf σ besitzt, innerhalb σ sicher null, da das Linienintegral über eine eventuell vorhandene,

sich von Flächenquelle zu Flächensenke erstreckende Differentialstromröhre, wegen des Fehlens der Tangentialkomponente des Feldes auf σ, nicht anders als Null sein könnte. Haben also zwei Felder innerhalb eines Raumes, der einfach zusammenhängend ist, bzw. keinen fremden Raum umschließt, dieselben Senken und Wirbel, und auf der Begrenzungsfläche dieselben Flächensenken bzw. Flächenwirbel, so sind sie in diesem Raume identisch und haben auch auf der Begrenzungsfläche dieselben Flächenwirbel bzw. Flächensenken. Es ist ausdrücklich hervorzuheben, daß dies nur unter den für τ aufgestellten Bedingungen der Fall ist. Ein Beispiel eines Feldes, das weder Senken noch Wirbel innerhalb σ, noch Flächensenken auf σ besitzt, und doch nicht null ist, ist z. B.:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2}, \tag{476}$$

wo $\mathbf{a}$ ein konstanter Vektor ist, wenn man als Begrenzungsflächen zwei beliebige Kreiszylinder mit $\mathbf{a}$ als Achse und zwei beliebige auf $\mathbf{a}$ senkrechte Ebenen wählt. Ebenso besitzt das Feld

$$\mathbf{v} = \frac{p\mathbf{r}}{r_m^3}, \tag{477}$$

wo p ein konstanter Skalar ist, weder Senken noch Wirbel innerhalb σ, noch Flächenwirbel auf σ, wenn man als Begrenzungsfläche zwei beliebige Kugeln mit O als Mittelpunkt wählt.

Das unendliche Skalar- und Vektorfeld. Kann das Feld nicht durch eine im endlichen liegende Fläche umschlossen werden, so heißt es unendlich. Ein unendliches Skalar- bzw. Vektorfeld, das Unstetigkeitsflächen enthalten mag, kann in derselben Weise wie ein endliches mit Hilfe von (472) bzw. (473) ausgedrückt bzw. zerlegt werden, vorausgesetzt, daß die Integrale einen bestimmten Wert haben. Bei einem Vektorfeld bedeutet dies, daß sich keine Senken oder Wirbel im Unendlichen befinden, daß demnach jede Differentialstromröhre entweder im Endlichen anfängt und endet, oder in sich zurückläuft. Dieser Bedingung wird aber jedenfalls genügt, wenn die Feldgröße bei ins Unendliche wachsendem $\mathbf{r}$ wie $\frac{1}{r_m^2}$ oder stärker verschwindet.[1]) Ein endlicher Teil eines unendlichen Feldes kann

1) Die beiden Felder $\mathbf{v}_\varrho$ und $\mathbf{v}_w$ in (469—471) genügen offenbar dieser Bedingung. Gans hat gezeigt, daß es sogar schon genügt, wenn die Feldgröße stärker als $r_m^{-\frac{3}{2}}$ verschwindet (04. 6 S. 50), und Blumenthal, daß die Zerlegung auch dann noch eindeutig ist, wenn das Feld samt seinen Abgeleiteten überhaupt im Unendlichen verschwindet, man aber die Bedingung hinzufügt, daß die beiden Teilfelder im Unendlichen schwächer als $\log r_m$ anwachsen (05. 8).

offenbar stets als ein unendliches Feld mit Unstetigkeiten in der Begrenzungsfläche aufgefaßt werden.

Allgemeine Integrationsformel. Endliche, sich in einem einfach zusammenhängenden Raum befindende, stetige Vektorfelder, ebensolche endliche Vektorfelder mit Unstetigkeitsflächen, und unendliche Vektorfelder, die im Unendlichen in bestimmter Weise null werden, lassen sich also alle in einer und nur einer Weise in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Bestandteil zerlegen nach Formel (473), vorausgesetzt, daß man auch die Flächensenken bzw. Wirbel als Senken bzw. Wirbel auffaßt.

Erweiterung der Bedeutung von pot. Die Formeln lassen sich nun noch bedeutend vereinfachen, wenn wir, nach dem Vorgange von Gibbs, sämtliche Flächengradienten, Flächensenken und Flächenwirbel als räumliche Gradienten, Senken und Wirbel in einer sehr dünnen Schicht auffassen. Jedes Feld mit Unstetigkeitsflächen wird dann als stetiges Feld aufgefaßt, und an Stelle von (472) und (473) treten die Formeln:

$$p = \int_{\tau,\mu} \frac{\operatorname{conv} p}{4\pi a_m}\, d\tau = \operatorname{conv} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{conv} p \tag{478}$$

bzw.:

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{v} &= \operatorname{conv} \int_{\tau,\mu} \frac{\operatorname{conv} \mathbf{v}}{4\pi a_m}\, d\tau + \operatorname{rot} \int_{\tau,\mu} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{4\pi a_m}\, d\tau \\ &= \operatorname{conv} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{conv} \mathbf{v} + \operatorname{rot} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{rot} \mathbf{v}. \end{aligned}\right. \tag{479}$$

Ist das Feld ein unendliches, so kann der Index $_\tau$ fortgelassen werden. Die Bedeutung des Zeichens pot_τ hat hierdurch eine Erweiterung erfahren, wodurch wir in den Stand gesetzt werden, unstetige Felder mit denselben einfachen Formeln zu behandeln wie stetige.

Die Gleichungen der herkömmlichen Vektoranalysis. Die Einfachheit und die Symmetrie der erhaltenen Formeln ist einesteils dem Prinzip zu verdanken, auf Grund dessen Flächenintegrale als Raumintegrale dargestellt werden, und jede Komplikation dadurch in die Deutung und nicht in die Formeln selbst verlegt wird, andererseits aber auch der in diesem Buch abgeleiteten Form der Vektoranalysis, die

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -1$$

setzt, und die Multiplikationen $\circ$ und $\cdot$ identifiziert, demnach grad auf Skalare angewandt, durch conv ersetzen kann. Denn die Formeln (462), (466) und (479) gestalten sich in der herkömmlichen Vektoranalysis, obwohl

sie noch keineswegs höhere Multiplikationen erfordern, bedeutend weniger einfach.

Der Zusammenhang der statt p, $\mathbf{v}$, q und $\mathbf{s}$ dort meist auftretenden Felder p, $\mathbf{v}$, q', $\mathbf{s}'$:

$$(480)\quad \begin{cases} p, \\ \mathbf{v} = \text{grad}\, p, \\ q' = \text{div}\, \mathbf{v} = \text{div grad}\, p = \nabla^2 p = -\nabla^{2\cdot} p, \\ \mathbf{s}' = \text{grad}\, q' = \text{grad div}\, \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla^{2\cdot}\, \mathbf{v} = \text{grad div grad}\, p, \end{cases}$$

(vgl. 462), wo:

$$(481)\quad \left|\begin{array}{l} \text{grad} = \text{conv}, \\ \text{div} = \text{conv}, \\ \nabla^2 = \Delta = -\nabla^{2\cdot}; \end{array}\right.$$

ist in der bisherigen Darstellung (wenn wir einfachheitshalber pot statt Pot anwenden[1]), in folgender Weise gegeben:

(482)

	p	$\mathbf{v}$	q'	$\mathbf{s}'$
p	$-\text{div grad pot}_\tau p$ $-\text{div pot}_\tau \text{grad}\, p$ $-\text{pot}_\tau \text{div grad}\, p$	$-\text{div pot}_\tau \mathbf{v}$ $-\text{pot}_\tau \text{div}\, \mathbf{v}$	$-\text{pot}_\tau q'$	$\text{div pot}_\tau \text{pot}_\tau \mathbf{s}'$ $\text{pot}_\tau \text{div pot}_\tau \mathbf{s}'$ $\text{pot}_\tau \text{pot}_\tau \text{div}\, \mathbf{s}'$
$\mathbf{v}$	$\text{grad}\, p$	$-\text{grad div pot}_\tau \mathbf{v}$ $-\text{grad pot}_\tau \text{div}\, \mathbf{v}$ $-\text{pot}_\tau \text{grad div}\, \mathbf{v}$	$-\text{grad pot}_\tau q'$ $-\text{pot}_\tau \text{grad}\, q'$	$-\text{pot}_\tau \mathbf{s}'$
q'	$\text{div grad}\, p$	$\text{div}\, \mathbf{v}$	$-\text{div grad pot}_\tau q'$ $-\text{div pot}_\tau \text{grad}\, q'$ $-\text{pot}_\tau \text{div grad}\, q'$	$-\text{div pot}_\tau \mathbf{s}'$ $-\text{pot}_\tau \text{div}\, \mathbf{s}'$
$\mathbf{s}'$	$\text{grad div grad}\, p$	$\text{grad div}\, \mathbf{v}$	$\text{grad}\, q'$	$-\text{grad div pot}_\tau \mathbf{s}'$ $-\text{grad pot}_\tau \text{div}\, \mathbf{s}'$ $-\text{pot}_\tau \text{grad div}\, \mathbf{s}'$

(Vgl. 466).

während die Tabelle des Zusammenhanges der Felder $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ und $\mathbf{z}$ dieselbe Form wie (468) hat. Die Zerlegung (479) lautete bisher:

$$(483)\quad \mathbf{v} = -\text{grad pot}_\tau \text{div}\, \mathbf{v} + \text{rot pot}_\tau \text{rot}\, \mathbf{v}.$$

1) Vgl. S. 204 ff.

Vergleichen wir beide Formelsätze, und beachten wir dabei, daß die Asymmetrie der Formeln nicht etwa durch andere Wahl der Felder gehoben werden kann, so tritt deutlich zutage, daß die Form der Vektoranalysis, die wir in diesem Buche als die Analysis der gerichteten Größen bis zur ersten Ordnung abgeleitet haben, in der Tat die einzige ist, die den Parallelismus zwischen conv und rot in vollständig symmetrischer Weise zur Darstellung bringt, und gerade sie es ist, die die Rechnung von unnötigen Minuszeichen freihält. Nun ist zwar die Zerstörung der Symmetrie der Formeln durch die auftretenden Minuszeichen für die praktische Rechnung wenig wichtig, man kommt dabei auch mit asymmetrischen Formeln aus, bei Untersuchungen, bei welchen es sich darum handelt, tiefer in das Wesen der Sache einzudringen, ist es jedoch von Wichtigkeit, die Unregelmäßigkeiten, die der Sache selbst anhaften, zu unterscheiden, von denen, die nur durch die Art der Rechnung eingeführt werden. Überhaupt ist es möglichst zu empfehlen, eine Rechnungsart zu verwenden, die selbst keine Unregelmäßigkeiten hinzufügt. Denn in jedem anderen Falle kann es leicht vorkommen, daß der Sache selbst Asymmetrien zugeschrieben werden, die bloß von dem gebrauchten Instrument herrühren, und auf diese Weise die verwendete Rechnungsart zur Bildung falscher Vorstellungen und Begriffe Anlaß gibt.

Umformung von (474) und (475), der erste Satz und das Theorem von Green. Bei der Anwendung von (478) bzw. (479) ist zu beachten, daß die Kommutativität von pot_τ und conv bzw. rot, die für ein stetiges endliches Feld abgeleitet wurde, für den allgemeinen Fall nicht gilt. Statt dieser Formeln darf also nicht etwa geschrieben werden

$$p = \mathrm{pot}_\tau \, \mathrm{conv}\, \mathrm{conv}\, p$$

bzw.

$$\mathfrak{v} = \mathrm{pot}_\tau \, \mathrm{conv}\, \mathrm{conv}\, \mathfrak{v} + \mathrm{pot}_\tau \, \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \mathfrak{v}.$$

Dies findet seinen Grund darin, daß wir durch die Gibbssche Ersetzung von Flächengradienten bzw. -Quellen bzw. -Wirbeln durch Gradienten- bzw. Quellen- bzw. Wirbelschichten zwar das Feld p bzw. $\mathfrak{v}$ stetig gemacht haben, aber damit noch nicht das Differentialfeld $\mathrm{conv}\, p$ bzw. $\mathrm{grad}\, \mathfrak{v}$. Die Felder $\mathrm{conv}\,\mathrm{conv}\, p$, $\mathrm{conv}\,\mathrm{conv}\, \mathfrak{v}$ und $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \mathfrak{v}$ können also an bestimmten Stellen unendlich werden, wodurch die Möglichkeit der Potentialbildung aufgehoben wird.

Wir können nun aber doch zu Ausdrücken gelangen, wobei sämtliche Differentialoperatoren unter dem Integrationssymbol stehen, und zwar in folgender Weise. Nehmen wir einfachheitshalber an, daß die Un-

stetigkeiten nur auf der Begrenzungsfläche auftreten, so ist für ein Skalarfeld jedenfalls:

$$p = \operatorname{conv} \int_\tau \frac{\operatorname{conv} p}{4\pi a_m}\, d\tau - \operatorname{conv} \int_\sigma \frac{\mathfrak{n} p}{4\pi a_m}\, d\sigma. \tag{474}$$

Bei der Integration bleibt der Punkt P fest, der Punkt Q durchläuft den ganzen Raum τ bzw. die ganze Fläche σ (Fig. 17). Die Veränderliche ist also $\mathfrak{q}$. Nachher ist von diesem Integral die Konvergenz zu bilden, wobei P, also $\mathfrak{r}$, veränderlich ist. Wir können dies in der Formel ausdrücken, indem wir schreiben:

Fig. 17.
Punkte P und Q eines Feldes.

$$p = \operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \int_\tau \frac{\operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} p}{4\pi a_m}\, d\tau - \operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \int_\sigma \frac{\mathfrak{n} p}{4\pi a_m}\, d\sigma.$$

Dem distributiven Gesetz gemäß ist aber die Konvergenz einer Summe gleich der Summe der Konvergenzen der einzelnen Summanden. Es ist also gestattet, zuerst von den Differentialen

$$\frac{\operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} p}{4\pi a_m}\, d\tau, \qquad \frac{\mathfrak{n} p}{4\pi a_m}\, d\sigma$$

die Konvergenz zu bilden und erst dann zu integrieren. Jedes dieser Differentiale bezieht sich aber auf einen ganz bestimmten Punkt Q, und stellt einen Zustand in dem veränderlichen Punkt P, also ein Feld, dar, das sich aus dem konstanten, weil eben für den Punkt Q gültigen, Werte $\operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} p$ bzw. $\mathfrak{n} p$, und der veränderlichen Entfernung zwischen P und Q berechnen läßt. Bilden wir also von diesen Feldern, die Teilfelder sind von

$$\int \frac{\operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} p}{4\pi a_m}\, d\tau \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{\mathfrak{n} p}{4\pi a_m}\, d\sigma,$$

die Konvergenz, so sind $\operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} p$ und $\mathfrak{n} p$ als Konstanten zu betrachten, und es ist:

$$\operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \frac{\operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} p}{4\pi a_m}\, d\tau = \operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \frac{1}{4\pi a_m} \cdot \operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} p\, d\tau,$$

$$\operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \frac{\mathfrak{n} p}{4\pi a_m}\, d\sigma = \operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \frac{1}{4\pi a_m} \cdot \mathfrak{n} p\, d\sigma,$$

$$p = \int_\tau \operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \frac{1}{4\pi a_m} \cdot \operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} p\, d\tau - \int_\sigma \operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \frac{1}{4\pi a_m} \cdot \mathfrak{n} p\, d\sigma,$$

wo $\operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} p$ bzw. $\mathfrak{n} p$ einen Feldwert in Q, Funktion von $\mathfrak{q}$, $\operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \frac{1}{4\pi a_m}$ aber einen Feldwert in P, Funktion von a_m, d. h. von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}$ angibt. p ist also noch nicht ausgedrückt als Raumintegral von Feldwerten in Q.

Bedenken wir aber, daß:

$$\operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \frac{1}{a_m} = \operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \frac{1}{(\mathfrak{q}-\mathfrak{r})_m} = -\frac{d\,\frac{1}{(\mathfrak{q}-\mathfrak{r})_m}}{d\mathfrak{r}}$$

ist, bei konstantem $\mathfrak{q}$, und:

$$\operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} \frac{1}{a_m} = \operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} \frac{1}{(\mathfrak{q}-\mathfrak{r})_m} = -\frac{d\,\frac{1}{(\mathfrak{q}-\mathfrak{r})_m}}{d\mathfrak{q}}$$

bei konstantem $\mathfrak{r}$, so folgt:

$$\operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} \frac{1}{a_m} = -\operatorname{conv}_{\mathfrak{r}} \frac{1}{a_m} \tag{484}$$

und:

$$p = -\int\limits_{\tau} \operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} \frac{1}{4\pi a_m} \cdot \operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} p\, d\tau + \int\limits_{\sigma} \operatorname{conv}_{\mathfrak{q}} \frac{1}{4\pi a_m} \cdot \mathfrak{n} p\, d\sigma.$$

Hier ist $\frac{1}{4\pi a_m}$ eine Funktion von $\mathfrak{q}$ bei konstantem $\mathfrak{r}$, gibt also einen Feldwert in Q an. Da sich jetzt alle unter dem Integrationszeichen vorkommenden Größen auf den Punkt Q beziehen, können die Indizes fortgelassen werden:

$$p = -\int\limits_{\tau} \operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} \cdot \operatorname{conv} p\, d\tau + \int\limits_{\sigma} \operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} \cdot \mathfrak{n} p\, d\sigma. \tag{485}$$

Durch diese Formel ist p im Punkte P als Raumintegral von Feldwerten in dem veränderlichen Punkt Q gegeben.

Diese wichtige Beziehung kann sofort verallgemeinert werden. Ist $\boldsymbol{\Phi}$ eine beliebige geometrische Größe, $(\boldsymbol{\Psi} \overset{\lambda}{-\!\circ} \nabla) \overset{\lambda}{-\!\circ}$ irgendein mit ∇ zusammengesetzter Differentialoperator, $\overset{\lambda}{-\!\circ}$ eine beliebige Multiplikation, und $d\lambda$ ein Linien-, Flächen- oder Raumelement, so ist offenbar, in derselben Weise wie oben, abzuleiten:

$$(\boldsymbol{\Psi} \overset{\lambda}{-\!\circ} \nabla) \overset{\lambda}{-\!\circ} \int\limits_{\lambda} \frac{\Phi}{a_m}\, d\lambda = -\int\limits_{\lambda} \left(\boldsymbol{\Psi} \overset{\lambda}{-\!\circ} \nabla \frac{1}{a_m}\right) \overset{\lambda}{-\!\circ} \boldsymbol{\Phi}\, d\tau, \tag{486}$$

oder in Worten:

> Regel: Ordnet man jedem Punkt P eines Raumes das Linien-, Flächen- oder Raumintegral der Feldgröße irgendeines Feldes $\boldsymbol{\Phi}$ dividiert durch die Entfernung a_m von P zu, und wendet man irgend einen Differentialoperator der Form $(\boldsymbol{\Psi} \overset{\lambda}{-\!\circ} \nabla) \overset{\lambda}{-\!\circ}$ auf das so entstandene Feld an, so erhält man das Resultat, indem man den Operator $(\boldsymbol{\Psi} \overset{\lambda}{-\!\circ} \nabla) \overset{\lambda}{-\!\circ}$ vor dem Integrationszeichen ersetzt durch einen Operator $-\left(\boldsymbol{\Psi} \overset{\lambda}{-\!\circ} \nabla \frac{1}{a_m}\right) \overset{\lambda}{-\!\circ}$ unter dem Integrationszeichen, und $\frac{\Phi}{a_m}$ durch $\boldsymbol{\Phi}$.

Die Formel (486) gestattet offenbar noch allgemein die Umformung:

$$
(487)\qquad \left\{\begin{aligned}
(\boldsymbol{\Psi} \overset{1}{\multimap} \nabla) \overset{2}{\multimap} \int_\lambda \frac{\boldsymbol{\Phi}}{a_m}\, d\lambda = & -\int_\lambda (\boldsymbol{\Psi} \overset{1}{\multimap} \dot{\nabla}) \overset{2}{\multimap} \frac{\boldsymbol{\Phi}}{a_m}\, d\lambda \\
& + \int_\lambda \frac{1}{a_m} (\boldsymbol{\Psi} \overset{1}{\multimap} \nabla) \overset{2}{\multimap} \boldsymbol{\Phi}\, d\lambda.
\end{aligned}\right.
$$

Je nach der Bedeutung von λ sind weitere Umformungen möglich. Da nach (374):

$$
\int_\tau \operatorname{conv} (p \operatorname{conv} q)\, d\tau = \int_\tau \operatorname{conv} p \operatorname{conv} q\, d\tau + \int_\tau p \operatorname{conv} \operatorname{conv} q\, d\tau,
$$

und also nach (447):

$$
(488)\qquad \int_\sigma \mathfrak{n} \cdot (p \operatorname{conv} q)\, d\sigma = \int_\tau \operatorname{conv} p \operatorname{conv} q\, d\tau + \int_\tau p \operatorname{conv} \operatorname{conv} q\, d\tau,
$$

(erster Satz von Green), ist z. B. aus (485) abzuleiten:

$$
(489)\qquad \left\{\begin{aligned}
p = & -\int_\sigma \frac{1}{4\pi a_m} \mathfrak{n} \cdot \operatorname{conv} p\, d\sigma + \int_\tau \frac{1}{4\pi a_m} \nabla^{2\cdot} p\, d\tau \\
& + \int_\sigma \operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} \cdot \mathfrak{n} p\, d\sigma
\end{aligned}\right.
$$

(Theorem von Green). Durch diese Formel läßt sich der Wert von p in jedem Punkte des Feldes berechnen, wenn das Feld $\nabla^{2\cdot} p$ und die Werte von p und $\mathfrak{n} \cdot \operatorname{conv} p$ auf der Begrenzungsfläche bekannt sind.

Für ein im Innern von σ stetiges Vektorfeld ist nach (475):

$$
(475)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{v} = & \operatorname{conv} \int_\tau \frac{\operatorname{conv} \mathfrak{v}}{4\pi a_m}\, d\tau - \operatorname{conv} \int \frac{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}}{4\pi a_m}\, d\sigma \\
& + \operatorname{rot} \int_\tau \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{v}}{4\pi a_m}\, d\tau - \operatorname{rot} \int \frac{\mathfrak{n} \times \mathfrak{v}}{4\pi a_m}\, d\sigma,
\end{aligned}\right.
$$

und also nach (486):

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{v} = & -\int_\tau \operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} \operatorname{conv} \mathfrak{v}\, d\tau - \operatorname{conv} \int_\sigma \frac{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}}{4\pi a_m}\, d\sigma \\
& -\int_\tau \operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, d\tau - \operatorname{rot} \int_\sigma \frac{\mathfrak{n} \times \mathfrak{v}}{4\pi a_m}\, d\sigma,
\end{aligned}
$$

oder unter Anwendung von (373) und (375):

$$(490)\begin{cases} \mathfrak{v} = -\int\limits_\tau \operatorname{conv} \frac{\operatorname{conv} \mathfrak{v}}{4\pi a_m} d\tau + \int\limits_\tau \frac{1}{4\pi a_m} \operatorname{conv} \operatorname{conv} \mathfrak{v}\, d\tau - \operatorname{conv} \int\limits_\sigma \frac{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}}{4\pi a_m} d\sigma \\ \quad - \int\limits_\tau \operatorname{rot} \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{v}}{4\pi a_m} d\tau + \int\limits_\tau \frac{1}{4\pi a_m} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, d\tau - \operatorname{rot} \int\limits_\sigma \frac{\mathfrak{n} \times \mathfrak{v}}{4\pi a_m} d\sigma. \end{cases}$$

Diese Formel geht unter Berücksichtigung von (447), (448) und (421) über in:

$$(491)\begin{cases} \mathfrak{v} = -\int\limits_\sigma \frac{1}{4\pi a_m} \mathfrak{n} \cdot \operatorname{conv} \mathfrak{v}\, d\sigma + \int\limits_\tau \frac{1}{4\pi a_m} \nabla^{2\cdot} \mathfrak{v}\, d\tau - \operatorname{conv} \int \frac{1}{4\pi a_m} \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}\, d\sigma \\ \quad - \int\limits_\sigma \frac{1}{4\pi a_m} \mathfrak{n} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, d\sigma - \operatorname{rot} \int \frac{1}{4\pi a_m} \mathfrak{n} \times \mathfrak{v}\, d\sigma, \end{cases}$$

eine Formel, die gestattet, den Wert von $\mathfrak{v}$ in jedem Punkte des Feldes zu berechnen, wenn das Feld $\nabla^{2\cdot}\mathfrak{v}$ und die Werte von $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{n} \cdot \operatorname{conv} \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{n} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}$ auf der Begrenzungsfläche bekannt sind.

Die Raumsumme eines Vektorfeldes. Da aus (361) bzw. (143b) olgt:

$$\nabla \mathbf{r} = \operatorname{grad} \mathbf{r} = -\mathbf{I}$$
$$\nabla \urcorner \mathbf{r} = \operatorname{Rot} \mathbf{r} = -2\mathbf{I},$$

ist:

$$(492)\begin{cases} \int\limits_\tau \mathfrak{v}\, d\tau = -\int\limits_\tau \mathfrak{v} \operatorname{grad} \mathbf{r}\, d\tau = \int\limits_\tau \{-\operatorname{Conv}(\mathfrak{v}\mathbf{r}) + \operatorname{conv} \mathfrak{v}\mathbf{r}\} d\tau \quad \text{(nach (356))} \\ \quad = -\int\limits_\sigma \mathbf{r}(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v})\, d\sigma + \int\limits_\tau \mathbf{r} \operatorname{conv} \mathfrak{v}\, d\tau \quad \text{(nach (451))} \end{cases}$$

bzw.:

$$(493)\begin{cases} \int\limits_\tau \mathfrak{v}\, d\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_\tau \mathfrak{v} \operatorname{Rot} \mathbf{r}\, d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_\tau \{\operatorname{Conv}(\mathfrak{v} \urcorner \mathbf{r}) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathbf{r}\} d\tau \quad \text{(nach (358))} \\ \quad = -\frac{1}{2}\int\limits_\sigma \mathbf{r} \times (\mathfrak{n} \times \mathfrak{v})\, d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_\tau \mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, d\tau \text{[1]} \quad \text{(nach (451))}. \end{cases}$$

Die Raumsumme kann also entweder aus den Senken und Flächensenken oder aus den Wirbeln und Flächenwirbeln berechnet werden. Bezeichnet man die Größe

$$\mathbf{r}\, q\, d\tau \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{r} \times \mathfrak{w}\, d\tau$$

---

1) Die Formel (492) bildet die Verallgemeinerung eines Satzes von Föppl (97. 2 S. 14) für den Fall, daß man die Flächensenken als gewöhnliche Senken auffaßt. In dieser Form wurde sie zusammen mit (493) zuerst von Wiener gegeben (12. 4 S. 523—544). Es finden sich dort auch verschiedene für die Theorie der Felder wichtige abgeleitete Sätze.

als das skalare bzw. vektorische Moment der Senke $q\,d\tau$ bzw. des Wirbels $\mathbf{w}\,d\tau$ in bezug auf O, so lassen sich (492) und (493) kurz wie folgt aussprechen: Die Raumsumme eines endlichen Vektorfeldes ist gleich dem skalaren Moment seiner Senken und Flächensenken und auch gleich der Hälfte des vektorischen Momentes seiner Wirbel und Flächenwirbel inbezug auf irgendeinen Punkt.

Zerlegung eines Affinorfeldes. Ist ein beliebiges Affinorfeld $\mathbf{A}$ gegeben, so nehme man einen konstanten Vektor $\mathbf{c}$ und bilde das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{c}.$$

Soll dieses Feld eindeutig zerlegbar sein, so muß offenbar $\mathbf{A}$ denselben Bedingungen genügen wie ein eindeutig zerlegbares Vektorfeld. Dann ist aber auch:

$$\mathbf{v} = \operatorname{conv} p + \operatorname{rot} \mathbf{a}. \quad \text{(Vgl. S. 190.)}$$

p und $\mathbf{a}$ ändern sich bei Änderung von $\mathbf{c}$ und sind lineare Funktionen von $\mathbf{c}$:

$$p = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$
$$\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{c},$$

wo $\mathbf{b}$ und $\mathbf{B}$ Funktionen von $\mathbf{r}$ sind. Also ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{c} &= \operatorname{conv}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + \operatorname{rot}(\mathbf{B}\mathbf{c}) \\ &= \operatorname{grad} \mathbf{b}\mathbf{c} + \operatorname{Rot} \mathbf{B}\mathbf{c} \quad \text{(nach (379) und (402))}, \end{aligned}$$

und zwar für jedes $\mathbf{c}$, sodaß:

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} \mathbf{b} + \operatorname{Rot} \mathbf{B}.^{1)} \tag{494}$$

Jedes Affinorfeld, das den angegebenen Bedingungen genügt, läßt sich also in einer und nur einer Weise zerlegen in das Gradientfeld eines Vektorfeldes und das affinorisch abgeleitete Feld eines Affinorfeldes. Für den ersten Teil verschwindet das vektordyadische Linienintegral über jede geschlossene Kurve (vgl. S. 180), sodaß nach (458):

$$\operatorname{Rot} \operatorname{grad} \mathbf{b} = 0. \tag{427}$$

Wir nennen diesen den wirbelfreien Bestandteil. Für den zweiten Teil ist

$$\operatorname{Conv} \operatorname{Rot} \mathbf{B} = 0, \tag{432}$$

es verschwindet demnach das vektordyadische Flächenintegral über jede geschlossene Fläche (vgl. (451)). Dieser zweite Teil kann also als quellen-

1) Beweis nach Burali Forti (11. 5). Nichtkoordinatenfreie Beweise sämtlicher Gleichungen der Affinorfelder erhält man, indem man den Affinor in der Form $\mathbf{u}\mathbf{a} + \mathbf{v}\mathbf{b} + \mathbf{w}\mathbf{c}$ schreibt, wo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ drei beliebig angenommene nicht komplanare konstante Vektoren sind.

freier Bestandteil bezeichnet werden. Offenbar kann jedes wirbelfreie Affinorfeld als Gradientfeld eines Vektorfeldes, und jedes quellenfreie als affinorisches Differentialfeld eines Affinorfeldes geschrieben werden (vgl. S. 181).

Das endliche stetige Vektorfeld und seine vektordyadisch und dyadisch abgeleiteten Felder. Es sei ein endliches stetiges Vektorfeld gegeben:

$$\mathbf{v} = f(\mathbf{r}). \tag{495a}$$

Der negative totale Differentialquotient ist ein wirbelfreies Affinorfeld:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = -\frac{d\mathbf{v}}{\bullet d\mathbf{r}} = \nabla\mathbf{v} = \operatorname{grad}\mathbf{v} \\ \operatorname{Rot}\mathbf{A} = 0. \end{cases} \tag{495b}$$

Bilden wir zu $\mathbf{A}$ das vektordyadisch abgeleitete Feld:

$$\mathbf{y} = \nabla\mathbf{A} = \operatorname{Conv}\mathbf{A}, \tag{495c}$$

und zu $\mathbf{y}$ wiederum das dyadisch abgeleitete Feld:

$$\mathbf{E} = \nabla\mathbf{y} = \operatorname{grad}\mathbf{y}, \tag{495d}$$

so ist die Folge der Felder:

$$\begin{cases} \mathbf{v} \\ \mathbf{A} = \operatorname{grad}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \operatorname{Conv}\mathbf{A} = \operatorname{Conv}\operatorname{grad}\mathbf{v} = \nabla^2\cdot\mathbf{v} \text{ (nach 426).} \\ \mathbf{E} = \operatorname{grad}\mathbf{y} = \operatorname{grad}\operatorname{Conv}\mathbf{A} = \nabla^2\cdot\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{Conv}\operatorname{grad}\mathbf{v} \text{ (nach 431).} \end{cases} \tag{496}$$

Auch die Felder $\mathbf{A}, \mathbf{y}, \mathbf{E}$ usw. seien stetig und auf σ gleich Null. Jedes der vier Felder ist eine eindeutige Funktion jedes anderen.

Da:

$$\mathbf{y} = \nabla^2\cdot\mathbf{v}$$
$$\mathbf{E} = \nabla^2\cdot\mathbf{A}$$

ist, ergibt sich:

$$\mathbf{v} = \operatorname{pot}_\tau\mathbf{y}$$
$$\mathbf{A} = \operatorname{pot}_\tau\mathbf{E},$$

und die Beziehungen der vier Felder zueinander lassen sich angeben, wie in (497), auf folgender Seite, gezeigt ist.

Der Operator Conv und das Funktionssymbol grad sind hier kommutativ mit dem Funktionssymbol pot_τ.

Das quellenfreie endliche stetige Affinorfeld und seine affinorisch abgeleiteten Felder. Es sei ein quellenfreies endliches stetiges Affinorfeld $\mathbf{A}$ gegeben mit den drei abgeleiteten Feldern:

$$(498)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{B} = \mathrm{Rot}\,\mathbf{A} \\ \mathbf{C} = \mathrm{Rot}\,\mathbf{B} = \mathrm{Rot\,Rot}\,\mathbf{A} = \nabla^{2}\cdot\mathbf{A} \\ \mathbf{D} = \mathrm{Rot}\,\mathbf{C} = \mathrm{Rot\,Rot}\,\mathbf{B} = \nabla^{2}\cdot\mathbf{B} = \mathrm{Rot\,Rot\,Rot}\,\mathbf{A} \end{array}\right\} \text{(nach 431).}$$

(497)

	v	**A**	**y**	**E**
v	$\mathrm{Conv\,grad\,pot}_\tau\,\mathbf{v}$ $\mathrm{Conv\,pot}_\tau\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Conv\,grad}\,\mathbf{v}$	$\mathrm{Conv\,pot}_\tau\,\mathbf{A}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Conv}\,\mathbf{A}$	$\mathrm{pot}_\tau\,\mathbf{y}$	$\mathrm{Conv\,pot}_\tau\,\mathrm{pot}_\tau\,\mathbf{E}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Conv\,pot}_\tau\,\mathbf{E}$ $\mathrm{Conv\,pot}_\tau\,\mathrm{pot}_\tau\,\mathbf{E}$
A	$\mathrm{grad}\,\mathbf{v}$	$\mathrm{grad\,Conv\,pot}_\tau\,\mathbf{A}$ $\mathrm{grad\,pot}_\tau\,\mathrm{Conv}\,\mathbf{A}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{grad\,Conv}\,\mathbf{A}$	$\mathrm{grad\,pot}_\tau\,\mathbf{y}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{grad}\,\mathbf{y}$	$\mathrm{pot}_\tau\,\mathbf{E}$
y	$\mathrm{Conv\,grad}\,\mathbf{v}$	$\mathrm{Conv}\,\mathbf{A}$	$\mathrm{Conv\,grad\,pot}_\tau\,\mathbf{y}$ $\mathrm{Conv\,pot}_\tau\,\mathrm{grad}\,\mathbf{y}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Conv\,grad}\,\mathbf{y}$	$\mathrm{Conv\,pot}_\tau\,\mathbf{E}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Conv}\,\mathbf{E}$
E	$\mathrm{grad\,Conv\,grad}\,\mathbf{v}$	$\mathrm{grad\,Conv}\,\mathbf{A}$	$\mathrm{grad}\,\mathbf{y}$	$\mathrm{grad\,Conv\,pot}_\tau\,\mathbf{E}$ $\mathrm{grad\,pot}_\tau\,\mathrm{Conv}\,\mathbf{E}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{grad\,Conv}\,\mathbf{E}$

Auch **B**, **C**, **D** usw. seien stetig und auf σ gleich null. Jedes der vier Felder läßt sich wiederum in folgender Weise als Funktion jedes anderen angeben:

(499)

	A	**B**	**C**	**D**
A	$\mathrm{Rot\,Rot\,pot}_\tau\,\mathbf{A}$ $\mathrm{Rot\,pot}_\tau\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{A}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Rot\,Rot}\,\mathbf{A}$	$\mathrm{Rot\,pot}_\tau\,\mathbf{B}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{B}$	$\mathrm{pot}_\tau\,\mathbf{C}$	$\mathrm{Rot\,pot}_\tau\,\mathrm{pot}_\tau\,\mathbf{D}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Rot\,pot}_\tau\,\mathbf{D}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{D}$
B	$\mathrm{Rot}\,\mathbf{A}$	$\mathrm{Rot\,Rot\,pot}_\tau\,\mathbf{B}$ $\mathrm{Rot\,pot}_\tau\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{B}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Rot\,Rot}\,\mathbf{B}$	$\mathrm{Rot\,pot}_\tau\,\mathbf{C}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{C}$	$\mathrm{pot}_\tau\,\mathbf{D}$
C	$\mathrm{Rot\,Rot}\,\mathbf{A}$	$\mathrm{Rot}\,\mathbf{B}$	$\mathrm{Rot\,Rot\,pot}_\tau\,\mathbf{C}$ $\mathrm{Rot\,pot}_\tau\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{C}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Rot\,Rot}\,\mathbf{C}$	$\mathrm{Rot\,pot}_\tau\,\mathbf{D}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{D}$
D	$\mathrm{Rot\,Rot\,Rot}\,\mathbf{A}$	$\mathrm{Rot\,Rot}\,\mathbf{B}$	$\mathrm{Rot\,Rot\,Rot}\,\mathbf{C}$	$\mathrm{Rot\,Rot\,pot}_\tau\,\mathbf{D}$ $\mathrm{Rot\,pot}_\tau\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{D}$ $\mathrm{pot}_\tau\,\mathrm{Rot\,Rot}\,\mathbf{D}$

Der Operator Rot ist hier kommutativ mit dem Funktionssymbol pot_τ.

Die Zerlegung eines endlichen stetigen Affinorfeldes. Da das Feld durch sein Senken- und Wirbelfeld vollständig bestimmt ist, ist in derselben Weise wie bei einem Vektorfeld (469—471):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_q + \mathbf{A}_w = \operatorname{grad} \mathrm{pot}_\tau \operatorname{Conv} \mathbf{A} + \operatorname{Rot} \mathrm{pot}_\tau \operatorname{Rot} \mathbf{A} \tag{500}$$

die gesuchte einzige Zerlegung. Sowohl $\mathbf{A}_q$ als $\mathbf{A}_w$ erstrecken sich auch außerhalb σ, und sind im allgemeinen auf σ nicht gleich Null.

Das unstetige Vektor- und Affinorfeld. Kommt die Bedingung der Stetigkeit in Fortfall, so gesellen sich zu den gewöhnlichen Gradienten, Senken und Wirbeln Flächengradienten, Senken und Wirbel, von der Stärke

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{n}(\mathfrak{v}_a - \mathfrak{v}_i)\,d\mu \\ \mathfrak{n}(\mathbf{A}_a - \mathbf{A}_i)\,d\mu \\ \mathfrak{n} \urcorner (\mathbf{A}_a - \mathbf{A}_i)\,d\mu \end{array}\right\} \text{(Vgl. S. 187.)}.$$

An Stelle der Integrationsformeln für $\mathfrak{v}$ in (497) und für $\mathbf{A}$ (500) treten also die Formeln:

$$\mathfrak{v} = \operatorname{Conv} \int_\tau \frac{\operatorname{grad} \mathfrak{v}}{4\pi a_m}\,d\tau + \operatorname{Conv} \int_\mu \frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{v}_a - \mathfrak{v}_i)}{4\pi a_m}\,d\mu, \tag{501}$$

bzw.:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \displaystyle\int_\tau \frac{\operatorname{Conv} \mathbf{A}}{4\pi a_m}\,d\tau + \operatorname{grad} \int_\mu \frac{\mathfrak{n}(\mathbf{A}_a - \mathbf{A}_i)}{4\pi a_m}\,d\mu \\ \quad + \operatorname{Rot} \displaystyle\int_\tau \frac{\operatorname{Rot} \mathbf{A}}{4\pi a_m}\,d\tau + \operatorname{Rot} \int_\mu \frac{\mathfrak{n} \urcorner (\mathbf{A}_a - \mathbf{A}_i)}{4\pi a_m}\,d\mu \end{array}\right. \tag{502}$$

(vgl. 472 und 473), die, im Falle sich die Unstetigkeiten nur auf der Begrenzungsfläche befinden, übergehen in:

$$\mathfrak{v} = \operatorname{Conv} \int_\tau \frac{\operatorname{grad} \mathfrak{v}}{4\pi a_m}\,d\tau - \operatorname{Conv} \int_\mu \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{v}}{4\pi a_m}\,d\sigma \tag{503}$$

bzw.

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \displaystyle\int_\tau \frac{\operatorname{Conv} \mathbf{A}}{4\pi a_m}\,d\tau - \operatorname{grad} \int_\sigma \frac{\mathfrak{n}\mathbf{A}}{4\pi a_m}\,d\sigma \\ \quad + \operatorname{Rot} \displaystyle\int_\tau \frac{\operatorname{Rot} \mathbf{A}}{4\pi a_m}\,d\tau - \operatorname{Rot} \int_\sigma \frac{\mathfrak{n} \urcorner \mathbf{A}}{4\pi a_m}\,d\sigma \end{array}\right. \tag{504}$$

(vgl. 474 und 475). Unter den schon auf S. 189 erwähnten Bedingungen sind diese Gleichungen auch auf unendliche Felder anwendbar. Bei Auf-

fassung der Unstetigkeitsflächen als Grenzfälle von Schichten können sie geschrieben werden:

$$\mathbf{v} = \operatorname{Conv} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{grad} \mathbf{v} \tag{505}$$

bzw.:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_q + \mathbf{A}_w = \operatorname{grad} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{Conv} \mathbf{A} + \operatorname{Rot} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{Rot} \mathbf{A} \tag{506}$$

(vgl. 478 und 479).

Die auf S. 189 gemachten Bemerkungen über das Bestimmtsein eines Vektorfeldes durch seine Senken und Wirbel und seine Flächensenken bzw. Flächenwirbel auf der Begrenzungsfläche, gelten auch für Affinorfelder (vgl. S. 197, Fußnote).

Umformung von (503) und (504), erweitertes Theorem von Green. Wenden wir auf (503) die Umformungsformeln (486, 487) an, so ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\int_\tau \operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} \operatorname{grad} \mathbf{v}\, d\tau + \int_\sigma \operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} (\mathbf{n}\mathbf{v})\, d\sigma \\ &= -\int_\tau \operatorname{Conv} \frac{\operatorname{grad} \mathbf{v}}{4\pi a_m}\, d\tau + \int_\tau \frac{1}{4\pi a_m} \nabla^2 \cdot \mathbf{v}\, d\tau + \int_\sigma \operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} (\mathbf{n}\mathbf{v})\, d\sigma, \end{aligned}\right. \tag{507}$$

oder unter Berücksichtigung von (451):

$$\mathbf{v} = -\int_\sigma \frac{1}{4\pi a_m} \mathbf{n} \operatorname{grad} \mathbf{v}\, d\sigma + \int_\tau \frac{1}{4\pi a_m} \nabla^2 \cdot \mathbf{v}\, d\tau + \int_\sigma \operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} (\mathbf{n}\mathbf{v})\, d\sigma \tag{508}$$

(erweitertes Theorem von Green für Vektoren), eine Formel, die gestattet, den Wert von $\mathbf{v}$ in jedem Punkt des Feldes zu berechnen, wenn das Feld $\nabla^2 \cdot \mathbf{v}$ und die Werte von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{n} \operatorname{grad} \mathbf{v}$ in der Begrenzungsfläche bekannt sind (vgl. 489).

Die Anwendung derselben Umformungsformeln auf (504) ergibt in ähnlicher Weise für ein Affinorfeld:

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{A} = &-\int_\sigma \frac{1}{4\pi a_m} \mathbf{n} \operatorname{Conv} \mathbf{A}\, d\sigma + \int_\tau \frac{1}{4\pi a_m} \nabla^2 \cdot \mathbf{A}\, d\tau - \operatorname{grad} \int_\sigma \frac{1}{4\pi a_m} \mathbf{n} \mathbf{A}\, d\sigma \\ &- \int_\sigma \frac{1}{4\pi a_m} \mathbf{n} \urcorner \operatorname{Rot} \mathbf{A}\, d\sigma - \operatorname{Rot} \int_\sigma \frac{1}{4\pi a_m} \mathbf{n} \urcorner \mathbf{A}\, d\sigma. \end{aligned}\right. \tag{509}$$

Diese Formel gestattet, den Wert von $\mathbf{A}$ in jedem Punkt des Feldes zu berechnen, wenn das Feld $\nabla^2 \cdot \mathbf{A}$ und die Werte von $\mathbf{A}$, $\operatorname{Conv} \mathbf{A}$ und $\mathbf{n} \urcorner \operatorname{Rot} \mathbf{A}$ in der Begrenzungsfläche bekannt sind (vgl. 491).

Die Zerlegung des Differentials des Feldaffinors. Das Differential des Feldvektors läßt sich nach (346) in symmetrischer Weise zerlegen in seine drei von Senken, Wirbeln und Scheren herrührenden Bestandteile:

$$(346) \qquad d\mathbf{v} = -\tfrac{1}{3} d\mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \tfrac{1}{2} d\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - d\mathbf{r} \mathbin{X} (\nabla \mathbin{X} \mathbf{v}).$$

Die entsprechende Zerlegung des Differentials des Feldaffinors erfordert Multiplikationen der Analysis dritter Ordnung, ist also eigentlich innerhalb der Affinoranalysis nicht möglich. So wie sich aber, wenn man von der Vektoranalysis ausgeht, ein Teil der Multiplikationen zweiter Ordnung durch Assoziationsänderung wenigstens formal angeben läßt, gelingt Ähnliches auch mit Hilfe der Affinoranalysis in bezug auf die Multiplikationen dritter Ordnung. Es wäre in der Tat möglich, in dieser Weise ein Rechnungssystem dritter Ordnung zu entwerfen, das sich zur ordnungsmäßig entwickelten Analysis verhalten würde, wie die herkömmliche Dyadenrechnung zur Affinoranalysis. In den Gibbsschen Triaden haben wir wirklich einen Ansatz zu einem solchen Rechnungssystem zu erblicken. Nun ist dieser Weg der Ableitung keineswegs ganz zu verwerfen, wenigstens nicht so lange der bessere Weg nicht bekannt war, und es sich darum handelte die Rechnung mit Größen dritter Ordnung überhaupt erst einigermaßen zu ermöglichen. Wo wir aber hier den Weg angegeben haben, auf dem jede Analysis irgendwelcher Ordnung sofort vollständig erhalten werden kann, allerdings unter Aufwendung der erforderlichen Rechenarbeit, erscheint es wenig zweckmäßig noch von einer anderen Ableitungsmethode Gebrauch zu machen. Wir haben deshalb grundsätzlich darauf verzichtet, die Affinoranalysis durch Assoziationsänderungen mit Multiplikationen dritter Ordnung zu bereichern. Dadurch müssen wir einerseits allerdings auf vollständige Darstellung der Infinitesimalrechnung des Affinorfeldes, sowie auf den direkten Beweis oder die adäquate Gestaltung mancher Formeln (z. B. 403, 406—409, 438—440) verzichten, bis die Analysis dritter Ordnung abgeleitet ist, gewinnen aber andererseits den Vorteil einer einheitlichen und vollkommen sachgemäßen Darstellung.

Nur an einem Beispiel soll gezeigt werden, wie sich derartige Multiplikationen dritter Ordnung ableiten ließen. Nach S. 156 bildet man den Differentialquotientoperator

$$\frac{d\mathbf{A}}{\overline{d}\mathbf{r}},$$

indem man zwei Multiplikationen $\overset{1}{-\!\!\circ}$ und $\overset{2}{-\!\!\circ}$ sucht, die der Bedingung

$$(510) \qquad \mathbf{a} \overset{1}{-\!\!\circ} (\mathbf{b} \overset{2}{-\!\!\circ} \mathbf{C}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{C} \qquad \text{(nach (343))}$$

genügen. Es ist dann

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{r}} = -\stackrel{1}{-\!\circ}(\nabla \stackrel{2}{-\!\circ} \mathbf{A}) \tag{511}$$

ein Operator dritter Ordnung, und $\stackrel{1}{-\!\circ}$ und $\stackrel{2}{-\!\circ}$ sind Multiplikationen dritter Ordnung. Da:

$$d\mathbf{A} = -(d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

ist, und nach (185):

$$\mathbf{I}(d\mathbf{r} \cdot \nabla) = \tfrac{1}{3}(d\mathbf{r}\nabla) + \tfrac{1}{2}(d\mathbf{r} \urcorner \nabla) + (d\mathbf{r} \diagdown \nabla),$$

läßt sich $d\mathbf{A}$ in drei Teile zerlegen:

$$\left\{\begin{aligned} d\mathbf{A}^{(1)} &= -\tfrac{1}{3}(d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{A} &&= -\tfrac{1}{3}d\mathbf{r}\nabla\mathbf{A} \\ & &&= -\tfrac{1}{3}d\mathbf{r}\,\mathrm{Conv}\,\mathbf{A} \\ d\mathbf{A}^{(2)} &= -\tfrac{1}{2}(d\mathbf{r} \urcorner \nabla)\mathbf{A} &&= -\tfrac{1}{2}d\mathbf{r} \urcorner (\nabla \urcorner \mathbf{A}) \\ & &&= -\tfrac{1}{2}d\mathbf{r} \urcorner \mathrm{Rot}\,\mathbf{A} \\ d\mathbf{A}^{(3)} &= -(d\mathbf{r} \diagdown \nabla)\mathbf{A}. && \end{aligned}\right. \tag{512a}$$

Die beiden ersten Teile rühren von den Senken bzw. Wirbeln des Feldes $\mathbf{A}$ her. Führen wir eine dritte Multiplikation $\stackrel{3}{-\!\circ}$ ein mit den Bedingungen:

$$(\mathbf{a} \diagdown \mathbf{b})\mathbf{C} = \mathbf{a} \stackrel{3}{-\!\circ} (\mathbf{b} \stackrel{3}{-\!\circ} \mathbf{C}), \tag{513}$$

so ist:

$$d\mathbf{A}^{(3)} = -(d\mathbf{r} \diagdown \nabla)\mathbf{A} = -d\mathbf{r} \stackrel{3}{-\!\circ} (\nabla \stackrel{3}{-\!\circ} \mathbf{A}). \tag{512b}$$

Der Operator

$$\nabla \stackrel{3}{-\!\circ}$$

ergibt die Scheren des Affinorfeldes und wäre etwa mit Dev zu bezeichnen. Die Zerlegung des Differentials des Feldaffinors nach Senken, Wirbeln und Scheren lautet also:

$$d\mathbf{A} = -\tfrac{1}{3}d\mathbf{r}\,\mathrm{Conv}\,\mathbf{A} - \tfrac{1}{2}d\mathbf{r} \urcorner \mathrm{Rot}\,\mathbf{A} - d\mathbf{r} \stackrel{3}{-\!\circ} \mathrm{Dev}\,\mathbf{A}, \tag{514a}$$

und die Zerlegung des Differentialquotienten:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{r}} = -\underline{\lfloor\times}\,\tfrac{1}{3}\mathrm{Conv}\,\mathbf{A} - \urcorner\,\tfrac{1}{2}\mathrm{Rot}\,\mathbf{A} - \stackrel{3}{-\!\circ}\mathrm{Dev}\,\mathbf{A}. \tag{514b}$$

Die Verwendung der Multiplikationen $\stackrel{1}{-\!\circ}$ und $\stackrel{2}{-\!\circ}$, die sich eigentlich erst in der Analysis dritter Ordnung ordnungsmäßig ergeben, gestattet z. B. die Bildung folgender Formel:

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{A} = &-\int_\sigma \frac{1}{4\pi a_m}\mathbf{n} \stackrel{1}{-\!\circ} (\nabla \stackrel{2}{-\!\circ} \mathbf{A})\,d\sigma + \int_\tau \frac{1}{4\pi a_m}\nabla^2 \cdot \mathbf{A}\,d\tau \\ &+ \int_\sigma \mathrm{conv}\frac{1}{4\pi a_m} \stackrel{1}{-\!\circ} (\mathbf{n} \stackrel{2}{-\!\circ} \mathbf{A})\,d\sigma \end{aligned}\right. \tag{515}$$

(erweitertes Theorem von Green für Affinoren, vgl. 489 und 508).

Die Raumsumme eines Affinorfeldes. In ähnlicher Weise wie bei einem Vektorfelde gilt:

$$\int\limits_\tau \mathbf{A}\,d\tau = -\int\limits_\sigma \mathbf{r}\mathbf{n}\mathbf{A}\,d\sigma + \int\limits_\tau \mathbf{r}\,\mathrm{Conv}\,\mathbf{A}\,d\tau \tag{516}$$

$$\int\limits_\tau \mathbf{A}\,d\tau = -\tfrac{1}{2}\int\limits_\sigma \mathbf{r} \urcorner \mathbf{n} \urcorner \mathbf{A}\,d\sigma + \tfrac{1}{2}\int\limits_\tau \mathbf{r} \urcorner \mathrm{Rot}\,\mathbf{A}\,d\tau \tag{517}$$

(vgl. 492 und 493). Die Raumsumme eines begrenzten Affinorfeldes ist also gleich dem dyadischen Moment seiner Senken und Flächensenken und auch gleich dem affinorischen Moment seiner Wirbel und Flächenwirbel in bezug auf irgend einen Punkt. Für den Beweis siehe z. B. die Bemerkung S. 197.

Die gerichteten Differentialoperatoren in anderen Systemen. Hamilton gebrauchte zuerst den Operator ∇ in Verbindung mit den Funktionszeichen S und V. Gibbs übernahm das Zeichen ∇, wandte es aber zunächst nur mit $\cdot$ und $\times$ an, da die Multiplikation $\times$ für ihn keine Bedeutung hatte. Das Auftreten der neuen Multiplikationen der Dyadenrechnung gab ihm dann Anlaß, ∇ auch dyadisch mit Vektoren und vektordyadisch und affinorisch mit Affinoren zu verknüpfen. Dabei enthüllte sich ihm die durchgehende Übereinstimmung von ∇ mit einem Vektor bei Umformung von Produkten.[1] Auch Wilson wurde durch diese Übereinstimmung veranlaßt, ∇ als einen symbolischen Vektor aufzufassen[2] und diese Auffassung „for practical purposes and for remembering formulae" auch bei der Ableitung von Formeln zu verwenden. Einen richtigen Beweis der Formel sah er dann aber in einer solchen Ableitung noch nicht, da ihm ihre invariantentheoretische Begründung fehlte. Die Voraussetzung $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = +1$ und die Nichtidentifizierung von $\cdot$ mit der Multiplikation von Skalaren gab ihm Anlaß zur Bildung dreier verschiedener Differentialoperatoren:

$$\begin{aligned} \nabla &= \quad \nabla\cdot \text{ wirkend auf Skalare,} \\ \mathrm{div} &= -\nabla\cdot \quad \text{„} \quad \text{„ Vektoren,} \\ \mathrm{curl} &= \quad \nabla\times \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \;. \end{aligned} \tag{481}$$

Der Operator von Laplace wurde in dieser Notation bezeichnet:

$$\Delta = \begin{cases} \mathrm{div}\,\nabla, \text{ auf Skalare wirkend} \\ \nabla\,\mathrm{div} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}, \text{ auf Vektoren wirkend,} \end{cases} \tag{518}$$

während die Funktion:

---

1) 81.4, 06.1, S. 85; 84.2, 06.1, S. 77. 2) 01.2, S. 147, 152.

$$(519) \qquad 4\pi \operatorname{pot} = \int \frac{(\ )}{a_m} d\tau$$

die Bezeichnung Pot erhielt. Bei Gibbs und Wilson ist also:

$$(520) \qquad \Delta \operatorname{Pot} \Phi = \nabla^2 \operatorname{Pot} \Phi = -4\pi \Phi,$$

wo Φ ein Skalar, Vektor oder Affinor. Als neue Operatoren definierte Gibbs noch dazu:

$$(521) \qquad \begin{aligned} \operatorname{New} a &= \nabla \ \operatorname{Pot} a & &(\ \ 4\pi \operatorname{conv} \operatorname{pot} a) \\ \operatorname{Lap} \mathbf{a} &= \nabla \times \operatorname{Pot} \mathbf{a} & &(\ \ 4\pi \operatorname{rot} \operatorname{pot} \mathbf{a} \ ) \\ \operatorname{Max} \mathbf{a} &= \nabla \cdot \operatorname{Pot} \mathbf{a} & &(-4\pi \operatorname{conv} \operatorname{pot} \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Wir haben es vorgezogen, das recht brauchbare Symbol pot beizubehalten, allerdings mit Fortlassung der Konstanten 4π, was durch die Verwendung des kleinen Anfangsbuchstabens p angedeutet werden mag, die Symbole New, Lap und Max aber nicht zu übernehmen, da sich dieselben mit Aufwendung weniger Gedächtnisarbeit durch Kombination von conv bzw. rot mit pot ersetzen lassen. Es sei bemerkt, daß New und — Max in unserer Darstellung identisch werden.

Wo Gibbs und Wilson die Vektoreigenschaften von ∇ nur noch zaghaft anwenden und nicht zum eigentlichen Beweise zulassen, geht Jaumann[1]) schon weiter, und benützt sie, wo nötig, auch zum Beweis. Zwar gibt er keine nähere Begründung der Zulässigkeit dieses Verfahrens. Auch die Natur des Zeichens ∇ ist ihm noch keineswegs klar. Seine Verknüpfungen bezeichnet er als „symbolische vektorische Multiplikationen", und er schreibt:

„Der Hamiltonsche Differentialoperator ∇ ist ein fingierter Vektor, dem deshalb keine geometrische Richtung oder Größe zugeschrieben werden kann, weil er definiert ist durch die Eigenschaft

$$\nabla;\ \mathbf{r} = \mathrm{I},$$

worin $\mathbf{r}$ der von einem beliebigen festen Nullpunkt aus gerechnete Ortsvektor ist. Es ist ganz unmöglich die Einheitsdyade I als lineare Dyade darzustellen, also wird Unmögliches von dem Vektor ∇ verlangt. Er hat also kein geometrisches Bild, läßt sich nicht als eine Strecke vorstellen. Sonst aber kann dieser nicht reelle Vektor fast wie ein gewöhnlicher Vektor in der Rechnung behandelt werden, und stellt merkwürdigerweise die Relationen zwischen den (skalaren, vektorischen, dyadischen) Funktionen des Ortsvektors und deren Derivationen her."[2])

---

1) 05. 6. 2) 05. 6 S. 52.

Indessen hatte Burkhardt schon 1896[1]) die Übereinstimmung der Verknüpfungsgesetze von ∇ mit denen eines Vektors invariantentheoretisch begründet, und dazu bemerkt, daß sie „in den meisten Darstellungen als etwas ganz Geheimnisvolles, das nur zur Auffindung neuer Sätze dienen könnte", erscheint, „aber in der Tat eine ganz legitime Schlußweise" enthält, „die ihre Begründung in den erwähnten Sätzen der Invariantentheorie findet; man muß nur bei ihrer Verwendung die Regeln beachten, die überhaupt für die Trennung von Operations- und Quantitätssymbolen gelten."

Da Jaumann zur Darstellung der nicht kommutativen Multiplikationen $\llcorner$, $\urcorner$ und $\llcorner^{\times}$ die schwerlich umkehrbaren Zeichen $;$, $\overset{\times}{;}$, und $.$ gebrauchte, fehlte ihm die geeignete Bezeichnung für die Verknüpfungen von ∇ mit der zu differenzierenden Größe, vermittels $\lrcorner$, $\ulcorner$ und $^{\times}\lrcorner$. Er kam so dazu, ∇ auch hinter die zu differenzierenden Größe zu stellen. Dieses Verfahren ist nicht zu empfehlen, da erstens die formalen Gesetze der Operatorkerne nullter Ordnung $\frac{d}{dt}$ für Operatorkerne höherer Ordnung nicht unnötig aufgehoben werden sollen (vgl. S. 156), und zweitens dadurch die Bildung der abgeleiteten Differentialoperatoren wie $(\mathfrak{a} \cdot \nabla)$ (S. 167) unmöglich gemacht wird. Nun sind letztere zwar immer dadurch zu umgehen, daß man zu Multiplikationen höherer Ordnung aufsteigt, diese sind aber innerhalb eines bestimmten Systems nicht immer verhanden (siehe z. B. (403), (406—409)). In diesen Fällen sind abgeleitete Differentialoperatoren dann durchaus nötig. Ihr Vorhandensein ist überhaupt sehr nützlich, da das leichte Arbeiten mit den Gleichungen einer höheren Analysis sehr gefördert wird durch die unmittelbare Ausführbarkeit möglichst vieler Assoziationsänderungen. Die auf S. 116 aufgestellte Forderung, daß einer nichtkommutativen Multiplikation auch ein asymmetrisches Zeichen entsprechen muß, bekommt durch diese Betrachtung noch eine nähere Begründung.

Koordinatenfreie Definitionen gab Gibbs für $\nabla \cdot$ wirkend auf Skalare, für $\nabla \cdot$, $\nabla \times$ und $\nabla \llcorner$ wirkend auf Vektoren, und für $\nabla \llcorner^{\times}$ und $\nabla \urcorner$ wirkend auf Affinoren.[2]) Eine allgemeine koordinatenfreie Definition der Differentialoperatoren ∇—o und $(\mathfrak{a} \times \nabla)$—o wurde aber erst 1908[3]) von Jung aufgestellt für den Fall, daß die zu differenzierende Größe ein Skalar oder Vektor ist, und zwar in der Form

---

1) 96. 3.
2) 84. 2, 06. 1 S. 77.
3) 08. 5.

$$(522)\qquad \begin{cases} \nabla \multimap = \dfrac{1}{d\tau}\displaystyle\int_{d\tau} d\sigma\,\mathfrak{n} \multimap \\ (\mathfrak{a}\times\nabla)\multimap = \dfrac{1}{d\tau}\displaystyle\int_{d\tau} d\sigma\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{n})\multimap.\text{[1]} \end{cases}$$

v. Ignatowsky gab 1909 folgende Definition des Produktes von ∇ mit einer Größe:

„Man setze in das Produkt statt ∇ das gerichtete Flächenelement $d\mathfrak{f}$, integriere über eine geschlossene Oberfläche F, teile durch das von F eingeschlossene Volumen V und gehe dann zur Grenze $V = 0$ über. Hierbei sollen diejenigen Größen, welche im Produkt vor ∇ stehen, bei der Integration über F als konstant betrachtet werden.“[2]

Er definierte also eigentlich einen Lückenausdruck:

$$(523)\qquad \begin{cases} \Phi \overset{2}{\multimap}\{\nabla \overset{1}{\multimap}(\quad)\} = \Phi \overset{2}{\multimap}\left\{\dfrac{1}{d\tau}\displaystyle\int_{d\sigma} d\sigma\,\mathfrak{n} \multimap(\quad)\right\} \\ \{\nabla \overset{1}{\multimap}(\quad)\}\overset{2}{\multimap}\Phi = \dfrac{1}{d\tau}\displaystyle\int_{d\sigma}\{d\tau\,\mathfrak{n}\multimap(\quad)\}\overset{2}{\multimap}\Phi, \end{cases}$$

wo Φ ein Skalar oder Vektor ist, und $\overset{1}{\multimap}$ und $\overset{2}{\multimap}$ beliebige Multiplikationen. Die Definition stimmt mit der Jungschen überein, solange Φ vor ∇ steht, im anderen Falle nicht. So ist z. B. nach v. Ignatowsky:

$$(524)\qquad \begin{cases} (\nabla\cdot\mathfrak{a})\mathfrak{b} = \dfrac{1}{d\tau}\displaystyle\int_{d\sigma}\{d\sigma\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{a}\}\,\mathfrak{b} \\ \qquad = (\mathfrak{a}\cdot\nabla)\mathfrak{b} + \mathfrak{b}(\nabla\cdot\mathfrak{a}) = \nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).\text{[3]} \end{cases}$$

v. Ignatowsky differenziert also alle Größen, die hinter ∇ stehen, auch über Klammern hinweg. Das Resultat ist übrigens genau so durch Assoziationsänderung auszurechnen, wie bei der gewöhnlichen Schreibweise. So ist z. B. v. Ignatowskys Produkt $(\nabla\times\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b}$ gleich:

---

1) Jung schreibt

$$\nabla\cdot = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau} d\mathfrak{f}\cdot$$

$$(\mathfrak{e}\times\nabla)\cdot = \frac{1}{d\tau}\int_{d\tau}(\mathfrak{e}\times d\mathfrak{f})\cdot$$

wo $\cdot$ das Zeichen einer beliebigen Multiplikation ist. (08. 5 S. 343, 345.)

2) 09. 13 S. 15.

3) 09. 13 S. 22. v. Ignatowsky gibt die skalare Multiplikation von Vektoren durch einfaches Nebeneinanderschreiben an, die vektorische durch eckige Klammern; den Punkt verwendet er als Trennungszeichen.

$$(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

und das Produkt $(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ nach seiner Auffassung gleich:

$$(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \nabla(\mathbf{a} \urcorner \mathbf{b}).^{1)}$$

Auch zur v. Ignatowskyschen Schreibweise ist, mit noch mehr Nachdruck als zur Jaumannschen, zu bemerken, daß die Differentialoperatoren höherer Ordnung den formalen Gesetzen der Differentialoperatoren nullter Ordnung möglichst zu unterwerfen sind. Indem man doch einem Differentialoperator die Eigenschaft beilegt, daß sein Einfluß sich über Klammern hinweg zu erstrecken vermag, entfernt man sich soweit von der allgemein in der Mathematik angenommenen Bedeutung von Klammern, daß ernstlich erwogen werden muß, ob ein solcher Schritt auch entsprechend gewinnbringend ist. Nun lassen sich aber die erwähnten Ausdrücke, wie angegeben, genau so gut anders darstellen, es kann daher die Abweichung von den allgemeinen Gesetzen des Rechnens mit Klammern nur als unzweckmäßig bezeichnet werden.

Die Identifizierung der Multiplikation $\lfloor\!\times$ mit $\cdot$ (vgl. S. 119 u. f.) konnte leicht zur Schreibweise

$$\nabla \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A} \tag{525}$$

führen, und in der Tat finden wir diese auch bei Voigt[2]), Gans[3]) und Wilson[4]). Dagegen hat Weber für $\nabla \mathbf{A}$ geschrieben:

$$\operatorname{grad} \mathbf{A},$$

eine weniger glücklich gewählte Bezeichnung, da grad besser für das negative totale Differentialfeld verwendet wird. Für den Gradienten eines Vektors:

$$\operatorname{grad} \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a}$$

wählte Weber[5]) die Bezeichnung:

$$\operatorname{def} \mathbf{a}$$

während Gans[6]) diese Bezeichnung für den Tensorteil des Gradienten:

$$\nabla \perp \mathbf{a}$$

verwendete.

Burali Forti und Marcolongo halten den Operatorkern ∇, ungeachtet der koordinatenfreien Definition Jungs, für eine „essentielle Tachy-

1) Dieses Produkt nennt v. Ignatowsky nicht, was damit zusammenhängen mag, daß er die Multiplikation $\urcorner$ nicht verwendet.

2) 04. 5. 3) 04. 6 S. 84. 4) 10. 7 S. 424.

5) 09. 17. 6) 04. 6 S. 81.

graphie".[1]) Sie verzichten deshalb grundsätzlich auf seinen Gebrauch, und gehen in ihrer koordinatenfreien Darstellung so weit, daß sie zum Beispiel in der Vektoranalysis div und rot wie folgt definieren:

$$(526)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{u} \times (dP \wedge \delta P) = d\mathfrak{u} \times \delta P - \delta\mathfrak{u} \times dP \\ \operatorname{div} \mathfrak{u} = \{\operatorname{grad}(\mathfrak{u} \times \mathfrak{a}) - \operatorname{rot}(\mathfrak{u} \wedge \mathfrak{a})\} \times \mathfrak{a}, \end{cases}$$ [2])

wobei zu bemerken ist, daß die Autoren die bekannte Tatsache, daß jeder Vektor als Differenz seines Endpunktes P und O aufgefaßt werden kann, in die Analysis einführen, und also statt $d\mathfrak{r}$ überall schreiben dP. Angesichts solcher Definitionen, die dazu dienen sollen, dem Leser einen neuen Begriff zum erstenmal vorzustellen, und die bei der Burali Fortischen Schule nicht nur in rein mathematischen Auseinandersetzungen, sondern auch z. B. bei Marcolongo in seiner theoretischen Mechanik[3]) gebraucht werden, möchte man sich dann doch fragen, ob die koordinatenfreie Darstellung etwa Selbstzweck ist, oder nur ein Mittel, das nur dort zu verwenden ist, wo es wirklich eine einfachere, deutlichere oder adäquatere Behandlung des Stoffes ermöglicht.

Der Verzicht auf den Gebrauch von ∇ rächt sich dadurch, daß die Analysis, die doch schon durch Bezeichnungen wie $\mathrm{H}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ statt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, und dP statt $d\mathfrak{r}$ hinlänglich kompliziert ist (vgl. S. 125), auch in allen Ableitungen und Umformungen der Formeln noch besonders schwerfällig und unübersichtlich wird, und die Eleganz und Kürze, die für eine richtige höhere Analysis charakteristisch sind, und einzig und allein ihren Gebrauch rechtfertigen, vollständig verliert. Um ein einziges Beispiel zu nennen, sei die Formel:

$$(401)\qquad \nabla \cdot (\mathbf{A}\mathfrak{b}) = (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathfrak{b} + \mathbf{A}_k \sqcap (\nabla \mathfrak{b})$$

erwähnt, die bei Burali Forti und Marcolongo in der komplizierten und unübersichtlichen Gestalt:

$$(527)\qquad \operatorname{div}(\alpha\mathfrak{u}) = \mathrm{I}_1\left(\alpha \frac{d\mathfrak{u}}{dP}\right) + (\operatorname{grad} \mathrm{K}\alpha) \times \mathfrak{u}$$ [4])

auftritt, und deren Beweis, der affinoranalytisch sofort unter Berücksichtigung der allgemeinen Regel für die Anwendung von Differentialoperatoren auf Produkte (367) erfolgt, bei ihnen die Einführung eines Hilfsvektors und einer Hilfsdyade erfordert.

Als Gradient einer Dyade führten die genannten Autoren einen

1) 07. 5 S. 329; 08. 2 S. 374; 09. 11 S. 465; 11. 1 S. 144.

2) 09. 15 S. 71.

3) 05. 7 S. 35.

4) 09. 12 S. 57, die kleinen griechischen Buchstaben geben Dyaden an.

Vektor ein, den sie zuerst nur mit Hilfe von Koordinaten darstellen konnten:

$$\left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{i}_1\right)\mathbf{i}_1 + \left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{i}_2\right)\mathbf{i}_2 + \left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{i}_3\right)\mathbf{i}_3 \quad {}^{1)},$$

dessen koordinatenfreie Darstellung aber durch Boggio 1910 gegeben wurde:

$$(528) \qquad (\text{grad}\ \alpha) \times dP = I_1 \frac{d(K\alpha\, dP)}{dP}. \quad {}^{2)}$$

Nun ist grad hier nichts anderes als $\nabla \underline{\times}\rfloor$, und insofern stimmt die Definition bis auf die Richtung der Multiplikation mit der Weberschen überein. In einer späteren Darstellung wird (527) als Definitionsgleichung von grad verwendet[3]), d. h. grad wird durch eine Assoziationsänderung definiert. Die Bezeichnung grad finden wir dadurch begründet, daß $\nabla \underline{\times}\rfloor \mathrm{A}$ in der Tat der Gradient eines Skalars wird, wenn A sich zu einem Skalar reduziert.[4]) Während aber Gibbs schon 1884 die auf Affinoren wirkenden Operatoren $\nabla \lfloor\overline{\times}$ und $\nabla \urcorner$ kannte und sogar eine koordinatenfreie Definition gab (vgl. S. 206)[5]), haben Burali Forti und Marcolongo gemeint, mit ihrem grad einen ganz neuen Operator gefunden zu haben, was schon daraus hervorgeht, daß ihnen der Operator $\nabla \urcorner$ 1909 in ihrem Buch „Omografie Vettoriali" noch ganz unbekannt war, und sie seinen Gebrauch dort umgehen mußten[6]), während Burali Forti ihn erst 1911 als „neuen Operator" in der Form:

$$\text{Rot}\ \alpha$$

durch die Gleichung:

$$(529) \qquad (\text{Rot}\ \alpha)\,\mathbf{u} = \text{rot}\,(\alpha\mathbf{u}) - 2\,V\left(\alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right),$$

(also ebenfalls durch eine Assoziationsänderung) definierte.[7]) Die Bezeichnung Rot ist allerdings sehr zweckmäßig, und wir haben sie übernommen, unter gleichzeitiger Einführung der gleichberechtigten Bezeichnungen Conv und Dev, während wir grad stets nur für den negativen vollständigen Differentialquotienten verwendet haben.

---

1) 09. 12 S. 49, Burali Forti und Marcolongo schreiben **i**, **j**, **k** für die Einheitsvektoren.

2) 10. 8 S. 384. 3) 12. 3 S. 70.

4) Burali Forti und Marcolongo haben selbst bemerkt (12. 3 S. 76), daß der Gradient eines Skalars „jouit de propriétés remarquables, qui n'appartiennent pas au gradient d'une homographie générale." (Vgl. dazu ihre S. 47 zitierte Definition der Gleichheit.) Dieser Mangel an Übereinstimmung verschwindet, sobald wir dem Worte gradient die von uns vorgeschlagene Bedeutung beilegen.

5) 84. 2, 06. 1 S. 77. 6) 09. 12 S. 57, Fußnote. 7) 11. 5.

Da die Analysis der omografie vettoriali nicht über den Operatorkern ∇ und auch nicht über das System von Multiplikationen der Affinoranalysis verfügt, ist ihr Arsenal sehr beschränkt. Sie kann daher oft einfache Beziehungen nur in sehr komplizierter Weise zur Darstellung bringen, oder ist gar genötigt, wenn die Komplikationen zu sehr wachsen, in willkürlicher Weise neue Funktionssymbole einzuführen. So hat z. B. M. Pieri für die einfache und sehr nützliche Verknüpfung

$$-(\mathbf{u}\nabla) \ulcorner \mathbf{A},$$

deren untere Dyade sich in omografie vettoriali nicht anders angeben läßt als durch:

$$\frac{d(\alpha\,\mathbf{u})}{dP} - \alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{dP}, \qquad \text{wo } \alpha = \mathbf{A}\,\llcorner\!\times,$$

ein neues Symbol geschaffen:

$$S(\alpha, \mathbf{u}),$$

eine Neuschaffung, die sehr wenig empfehlenswert ist, da sie die eigentliche Natur der darzustellenden Verknüpfung vollständig verdeckt und zur Aufstellung einer ganzen Serie sehr unverständlich aussehender Formeln geführt hat[1]), Formeln, die sich noch dazu meist, affinoranalytisch übersetzt, als sehr einfache Identitäten herausstellen. An Stelle der unmittelbar evidenten Identität:

$$\nabla \lrcorner (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v}\,\nabla) \ulcorner \mathbf{u} - (\mathbf{u}\,\nabla) \ulcorner \mathbf{v} \quad (\text{vgl. } (389))$$

tritt z. B. die Formel:

$$\frac{d(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})}{dP} = S(\mathbf{u}\wedge, \mathbf{v}) - S(\mathbf{v}\wedge, \mathbf{u}).$$

Eine sehr merkwürdige Stellung nehmen Burali Forti und Marcolongo dem Operator von Laplace gegenüber ein. Da dieser Operator sich, auf Skalare bzw. Vektoren angewandt, in der herkömmlichen Vektoranalysis jedesmal in einer anderen Form darstellt:

$$(530) \qquad \begin{cases} \Delta a = -\nabla^2 \cdot a = \operatorname{div} \operatorname{grad} a \\ \Delta \mathbf{a} = -\nabla^2 \cdot \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}, \end{cases}$$

glauben sie, jedesmal mit einem anderen Operator zu tun zu haben. Diese Operatoren, die nach ihnen nur in der Koordinatendarstellung gleiche Form haben, bezeichnen sie mit Δ und Δ'. Die Gleichheit der Koordinatendarstellung soll dann kein Grund sein „qui peut justifier l'usage d'un seul signe pour indiquer des choses bien différentes; en con-

1) 12. 3 S. 96.

traire, elle prouve encore une fois que l'usage systématique des coordonnées peut faire envisager des pseudo-operateurs qui n'ont plus de caractère géométrique et logique!"[1]), das Zeichen Δ, in doppelter Bedeutung verwendet, ist also eine essentielle Tachygraphie. Obwohl es nun für Δ sogar drei koordinatenfreie Definitionen gibt:

$$\int_\tau \Delta\Phi d\tau = \int_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma \quad ^{2)} \tag{531}$$

und:

$$\begin{cases} r_m^2 \Delta\Phi = 6(\overline{\Phi} - \Phi) \quad ^{3)} \\ r_m^2 \Delta\Phi = 10(\overline{\overline{\Phi}} - \Phi), \end{cases} \tag{532}$$

wo r_m der Radius einer Differentialkugel, und $\overline{\Phi}$ bzw. $\overline{\overline{\Phi}}$ der Mittelwert von Φ auf der Oberfläche der Kugel bzw. in dem eingeschlossenen Raum, und Φ in beiden Formeln eine Größe beliebiger Art ist, erklären sie, daß diese Formeln „prouvent seulement que deux fonctions distinctes ont en commun une propriété particulière; mais cela ne veut pas dire qu'elles soient identiques". „Cela prouve seuelement que: il y a des fonctions applicables à des vecteurs ou à des nombres et par lesquelles on peut exprimer $\nabla\Phi$ dans les deux cas (Φ nombre ou vecteur). Peut on conclure que Δ est unique?"[4]) Das Merkwürdigste dabei ist dann, daß Burali Forti später den Operator von Laplace wirkend auf Dyaden wieder mit Δ identifiziert hat[5]), obwohl der Operator doch auch in diesem Falle nur dann mit div grad identisch ist, wenn die Dyade sich zu einem skalaren Operator reduziert.

In der Affinoranalysis erscheinen die Einwendungen gegen die Identifizierung dieser Operatoren zweiter Ordnung in allen drei Fällen völlig unbegründet. $\nabla^{2}\cdot$ auf einen Affinor wirkend, ergibt:

$$\begin{cases} \nabla^{2}\cdot \mathbf{A} = \nabla(\nabla \mathbf{A}) + \nabla \urcorner (\nabla \urcorner \mathbf{A}) \\ \nabla^{2}\cdot\cdot = \nabla \llcorner \nabla \llcorner^{\times} + \nabla \urcorner \nabla \urcorner = \text{grad Conv} + \text{Rot Rot}. \quad ^{6)} \end{cases} \tag{431}$$

Von dieser Formel sind alle anderen Spezialfälle. Reduziert sich der Affinor zu einem Vektor, so geht der Ausdruck über in:

---

1) 09. 10 S. 461. 2) Timerding 09. 3.
3) Gibbs 81. 4, 06. 1 S. 37; Wilson 10. 7 S. 422. 4) 11. 1 S. 142. 5) 11. 4.
6) Burali Forti und Marcolongo schreiben hier:

$$\Delta = \text{Rot Rot} + K \frac{d}{dP} \text{grad } K$$

(12. 3 S. 104), die durchgehende Übereinstimmung zwischen Vektoren und Affinoren ist ihnen also entgangen, was zusammenhängt mit dem Fehlen der Umkehrungen der Multiplikationen, hier insbesondere von $\lrcorner$, in ihrem System.

$$\begin{aligned}\nabla^2\cdot &= \beta\nabla \llcorner \nabla \llcorner^{\times} + \beta\nabla \urcorner \nabla \urcorner \quad (145,\ 146)\\ &= (\tfrac{1}{2}\nabla \times \nabla \times + \beta\nabla \mathrm{X} \nabla \times) + (\tfrac{1}{2}(\nabla\cdot\nabla)\cdot + \tfrac{1}{2}\nabla\cdot\nabla\cdot - \beta\nabla \mathrm{X} \nabla \times)\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{conv}\,\mathrm{conv} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} + \tfrac{1}{2}\nabla^2\cdot\\ &= \mathrm{conv}\,\mathrm{conv} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,,\end{aligned}$$

und reduziert er sich zu einem Skalar, so entsteht die Formel:

$$\begin{aligned}\nabla^2\cdot &= \alpha\nabla \llcorner \nabla \llcorner^{\times} + \alpha\beta\nabla \urcorner \nabla \urcorner\\ &= \alpha\nabla \llcorner \nabla\cdot + \beta\nabla \urcorner \nabla\cdot\\ &= \alpha\nabla \llcorner \nabla\cdot - \alpha\nabla \llcorner \nabla\cdot + 3\alpha^2\nabla\cdot\nabla\cdot\\ &= \mathrm{conv}\,\mathrm{conv}\,.\end{aligned}$$

Schluß. Die Affinoranalysis wäre damit, was ihre Entstehungsweise, ihre Rechnungsregeln und ihre Beziehungen zu anderen Systemen zweiter Ordnung betrifft, der Hauptsache nach dargestellt. Es bleibt jetzt noch die Aufgabe, ihre praktische Brauchbarkeit an einigen Beispielen darzutun, was im nächsten Kapitel geschehen mag.

Sechstes Kapitel.

Anwendungen.

Das Vorzeichen der Arbeit. Auf einen Körper A wirke eine Kraft $\mathbf{k}$, etwa indem ein Seil durch einen arbeitleistenden Mechanismus M gezogen wird (Fig. 18). Der Körper A bewege sich infolgedessen um eine Strecke $\mathbf{s}$ in der Richtung der Kraft. Die von dem Mechanismus während des Vorganges geleistete Arbeit ist

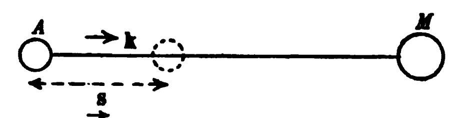


Fig. 18. Mechanismus M und Körper A.

$$k_m s_m.$$

Die Energieänderung von M, nur infolge des beschriebenen Vorganges ist also

$$-k_m s_m.$$

Das ist gerade der Wert, den wir

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}$$

schreiben. In unserer Notation ist also das innere Produkt von Kraft und Weg gleich der Energieänderung des Teiles, der diese Kraft ausübt. A übt auf das Seil eine Kraft $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ aus, es ist also auch hier die Energieänderung in derselben Weise zu berechnen, nämlich zu:

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s}.$$

In der herkömmlichen Vektoranalysis hat $\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}$ die Bedeutung $+ k_m s_m$, es ist also dort das innere Produkt von Kraft und Weg gleich der Energieänderung des Teiles, der die entgegengesetzte Kraft ausübt. Es zeigt sich also, daß das von der allgemeinen Theorie der Systeme von Größen verschiedener Ordnung geforderte Minuszeichen sich auch hier besser den mechanischen Tatsachen anschließt als das zurzeit übliche $+$ Zeichen.

Rotierendes Bezugssystem. Es sei außer dem festen Bezugssystem ein zweites gegeben mit demselben Ursprung, daß um einen festen Vektor $\mathbf{w}$ mit einer Geschwindigkeit w_m rotiert in einer Richtung, die der Richtung von $\mathbf{w}$ vermittels einer Rechtsschraube zugeordnet ist. Ein Punkt, gegeben durch den festen Radiusvektor $\mathbf{r}$, fällt dann in jedem

Augenblick mit einem in bezug auf das bewegliche System festen Punkt zusammen, der in bezug auf das feste System die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} \tag{533}$$

hat. Betrachten wir jetzt einen Vektor $\mathbf{s}$, der in bezug auf das feste Achsensystem in Ruhe ist, so ist für dieses System:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = 0. \tag{534}$$

Für einen mit dem anderen System mitbewegten Beobachter ist aber $\mathbf{s}$ veränderlich, und zwar ist für ihn:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{w} \times \mathbf{s}. \tag{535}$$

Ist der Vektor $\mathbf{s}$ auch in bezug auf das feste System beweglich, also:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} \neq 0, \tag{536}$$

so ist offenbar:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} - \mathbf{w} \times \mathbf{s}. \tag{537}$$

Die Betrachtung läßt sich leicht auf Affinoren ausdehnen. Ist ein dem festen Achsensystem gegenüber konstanter Affinor $\mathbf{A} = \mathbf{ab}$ gegeben, so ist die Änderung, die er in der Zeit dt inbezug auf das andere Achsensystem erfährt, offenbar gleich:

$$\mathrm{d}(\mathbf{ab}) = \mathrm{d}\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{b}.$$

Es ist also:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(\mathbf{ab})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\mathbf{b} + \mathbf{a}\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} \\ &= -(\mathbf{w} \times \mathbf{a})\mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{w} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{w} \urcorner (\mathbf{ab}) + (\mathbf{ab}) \urcorner \mathbf{w} \text{ (nach (167))} \\ &= -\mathbf{w} \times \mathbf{A} \quad \text{(nach (234))}. \end{aligned}\right. \tag{538}$$

Ist $\mathbf{A}$ auch in bezug auf das feste Achsensystem veränderlich, so ist offenbar, ähnlich wie bei einem Vektor:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{w} \times \mathbf{A}. \tag{539}$$

Das in der Affinoranalysis neu auftretende vektorische Produkt eines Vektors mit einem Affinor erhält durch diese Anwendung eine leichtfaßliche Deutung.

Die Stellung des beweglichen Systems in bezug auf das feste kann in jedem Augenblick gegeben werden durch einen Rotator $\mathbf{R}$. Irgendein mit dem ersten System mitbewegter Vektor $\mathbf{s}$ kann also geschrieben werden:

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}\mathbf{s}_a, \tag{540}$$

wo $\mathfrak{s}_a$ ein ruhender Vektor ist. Da nach (533) und (240):

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathfrak{s}_a = \mathfrak{w} \times \mathfrak{s} = \mathfrak{w} \times (\mathbf{R}\mathfrak{s}_a) = (\mathfrak{w} \urcorner \mathbf{R})\mathfrak{s}_a$$

ist für jedes $\mathfrak{s}$, ist:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathfrak{w} \urcorner \mathbf{R}. \tag{541}$$

Diese Formel gibt eine einfache Deutung des affinorischen Produkts eines Vektors mit einem Affinor.

Bewegung eines starren Körpers. Wirken auf einen starren Körper zur Zeit t die Kräfte $\mathfrak{k}_a, \mathfrak{k}_b, \ldots$ in den Angriffspunkten $\mathfrak{r}_a, \mathfrak{r}_b, \ldots,$ so folgt aus dem Prinzip von d'Alembert und unter Berücksichtigung der Eigenschaften des Schwerpunktes:

$$(542)\quad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{d}{dt}\sum m\mathfrak{v} = M\dfrac{d\mathfrak{v}_s}{dt} = \sum \mathfrak{k} \\ \text{b)} & \dfrac{d}{dt}\sum m\mathfrak{v} \times \mathfrak{r} = \sum \mathfrak{k} \times \mathfrak{r}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit und m die Masse eines Massenelements mit dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$, M die totale Masse und $\mathfrak{v}_s$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist. Versteht man unter $\mathfrak{a}$ die Bewegungsgröße $M\mathfrak{v}_s$ und unter $\mathfrak{b}$ den Drall in bezug auf O, $\sum m\mathfrak{v} \times \mathfrak{r}$, so lassen sich (542 a) und (542 b) wie folgt schreiben:

$$(543)\quad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{d\mathfrak{a}}{dt} = \sum \mathfrak{k} \\ \text{b)} & \dfrac{d\mathfrak{b}}{dt} = \sum \mathfrak{k} \times \mathfrak{r}. \end{cases}$$

Die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers ist für jeden beliebigen Punkt O anzugeben als eine Translation, verbunden mit einer Rotation um eine durch diesen Punkt gehende Achse. Ist also $\mathfrak{r}$ die Entfernung von O, so ist:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{w} \times \mathfrak{r}, \tag{544}$$

wo $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit von O ist und $\mathfrak{w}$ ein Vektor in Richtung der Rotationsachse, dessen Absolutwert gleich der Winkelgeschwindigkeit ist. Aus dieser Gleichung folgt unter Anwendung von (173 b):

$$(545)\quad \begin{cases} \text{a)} & \mathfrak{a} = M\mathfrak{v}_s \\ \text{b)} & \mathfrak{b} = \sum m(\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{w} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{r} \\ & \quad = \sum m\mathfrak{v}_0 \times \mathfrak{r} + \sum m(\mathfrak{w} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{r} \\ & \quad = M\mathfrak{v}_0 \times \mathfrak{r}_s + \sum m\mathfrak{w}(\mathfrak{r} \urcorner \mathfrak{r}) \\ & \quad = M\mathfrak{v}_0 \times \mathfrak{r}_s + \mathfrak{w}\sum m(\mathfrak{r} \urcorner \mathfrak{r}) \\ & \quad = M\mathfrak{v}_0 \times \mathfrak{r}_s + \mathfrak{w}\mathbf{T}, \end{cases}$$

wo:

$$\mathbf{T} = \sum m\mathbf{r} \urcorner \mathbf{r} \tag{546}$$

der Trägheitstensor und $\mathfrak{b}$ der Drall des Körpers in bezug auf den Punkt O, $\mathbf{r}_s$ der Radiusvektor und $\mathbf{v}_s$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist.[1]) Wird in (545b) entweder $\mathbf{v}_0$ oder $\mathbf{r}_s$ gleich Null, d. h. bezieht man sich auf einen ruhenden Punkt, oder fällt der Bezugspunkt mit dem Schwerpunkt zusammen, so geht die Gleichung über in:

$$\mathfrak{b} = \mathbf{w}\mathbf{T}. \tag{547}$$

Der Drall ist dann also eine lineare Funktion der Winkelgeschwindigkeit.

Zur Berechnung der lebendigen Kraft L des Körpers verlegen wir O in den Schwerpunkt. Es ist dann:

$$\begin{aligned} L = -\tfrac{1}{2}\sum m\mathbf{v}^{2\cdot} &= -\tfrac{1}{2}M\mathbf{v}_s^{2\cdot} - \sum m\mathbf{v}_s\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{r}) \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}\sum m(\mathbf{w}\times\mathbf{r})^{2\cdot} \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_s\cdot\mathfrak{a} - (\mathbf{v}_s\times\mathbf{w})\cdot\sum m\mathbf{r} \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\sum m\mathbf{w}\{(\mathbf{w}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}\} \qquad \text{(nach (172))} \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_s\cdot\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}\mathbf{w}\cdot\{\mathbf{w}\sum m(\mathbf{r}\urcorner\mathbf{r})\} \quad \text{(nach (173b))} \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_s\cdot\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}\mathbf{w}\cdot\mathfrak{b}, \end{aligned} \tag{548}$$

oder auch nach (245):

$$\begin{aligned} L &= -\tfrac{1}{2}M\mathbf{v}_s^{2\cdot} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{w}\mathbf{w}) \boxdot \sum m(\mathbf{r}\urcorner\mathbf{r}) \\ &= -\tfrac{1}{2}M\mathbf{v}_s^{2\cdot} + \tfrac{1}{2}\mathbf{T}\boxdot(\mathbf{w}\mathbf{w}) \\ &= -\tfrac{1}{2}M\mathbf{v}_s^{2\cdot} + \tfrac{1}{2}\mathbf{T}\boxdot\mathbf{W}^{2)}, \end{aligned} \tag{549}$$

wo:

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}\mathbf{w} \tag{550}$$

der Tensor der Drehungsgeschwindigkeit oder Drehungstensor ist. Der zweite Bestandteil von L läßt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} L_2 = +\tfrac{1}{2}T\boxdot(\mathbf{w}\mathbf{w}) &= \{\tfrac{1}{2}\mathbf{T}\boxdot(\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0)\}(-\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{w}_m^2\{\mathbf{T}\boxdot(\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0)\}. \end{aligned} \tag{551}$$

Hieraus geht hervor, daß $\mathbf{T}\boxdot(\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0)$ das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Achse von $\mathbf{w}$ ist. Allgemein ist also das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse eines beliebigen Einheitsvektors $\mathfrak{a}_0$:

$$T_{\mathfrak{a}_0} = \mathbf{T}\boxdot(\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_0). \tag{552}$$

---

1) Der Skalar M muß aufgefaßt werden als ein im euklidischen Raum degenerierter Tensor. Im elliptischen Raum, wo jede Bewegung in zwei reine Drehungen zerlegt werden kann, tritt dieser Tensor wirklich auf.

2) Im elliptischen Raum wird der Ausdruck symmetrisch.

Ist der Körper nicht in eine Ebene oder Gerade ausgeartet, so ist $\mathbf{T}$ sicher nicht Teiler der Null. Ist $\mathbf{T}$ der Trägheitstensor in bezug auf den Punkt O, so ist der Trägheitstensor in bezug auf einen Punkt P mit dem Radiusvektor $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \sum m(\mathbf{r} \urcorner \mathbf{r}) - 2\sum m(\mathbf{r} \top \mathbf{p}) + \sum m(\mathbf{p} \urcorner \mathbf{p}) \\ &= T - 2M\mathbf{r}_s \top \mathbf{p} + M\mathbf{p} \urcorner \mathbf{p}.\end{aligned} \tag{553}$$

Ist O der Schwerpunkt, so vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T} + M\mathbf{p} \urcorner \mathbf{p}. \tag{554}$$

Bewegung eines freien Körpers. Der Drall in bezug auf den Schwerpunkt ist der Winkelgeschwindigkeit vermittels der Dyade $\mathbf{T} \llcorner$ zugeordnet. Fehlen also äußere Kräfte, so ist nach (543) und (547):

$$\mathbf{b} = \text{konstant}$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{w}\mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} = 2L = \text{konstant}.$$

Da L konstant ist, kann also $\mathbf{w}$ nur Radiusvektor des Trägheitsellipsoids:

$$(\mathbf{w}\mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} = 2L \tag{555}$$

sein. Dann ist aber $\mathbf{b} = \mathbf{w}\mathbf{T}$ der Vektor der Berührungsebene in dem Endpunkt von $\mathbf{r}$ (vgl. S. 149). Nennen wir diese Ebene des Drallvektors die Drallebene, so bleibt bei der untersuchten Bewegung die Drallebene konstant. Da überdies die Drehungsachse stets durch den Berührungspunkt geht, besteht die Bewegung also, von Translationen abgesehen, aus einem Rollen des Trägheitsellipsoids auf der Drallebene.

Allgemeine Bewegungsgleichungen. Die Resultante sämtlicher an dem Körper angreifender Kräfte erzeugt eine Translation, gegeben durch die Gleichung (542a). Von dieser Translation wollen wir weiterhin absehen. Wenn $\mathbf{m}$ das totale Moment der Kräfte und $\mathbf{b}$ der Drall in bezug auf den Schwerpunkt ist, so ist nach (543b) und (547):

$$\mathbf{m} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d(\mathbf{T}\mathbf{w})}{dt}. \tag{556}$$

Die Bewegungsgleichungen können jetzt sowohl in bezug auf ein mit dem Körper bewegliches als auf ein festes Achsensystem aufgestellt werden. Für den ersten Fall ist nach (537) und (547):

$$\left\{\begin{aligned}\mathbf{m} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{w} \times \mathbf{b} = \mathbf{T}\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{w} \times \mathbf{b} \\ &= \mathbf{T}\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{w} \times (\mathbf{T}\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{T}\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} + (\mathbf{w}\mathbf{w}) \overline{\times}\!\urcorner\, \mathbf{T}, \qquad \text{(nach (241))}\end{aligned}\right. \tag{557}$$

wo das Differentialzeichen d sich auf die Beurteilung vom beweglichen System aus bezieht. Für $\mathbf{m} = 0$ ist

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\frac{\mathbf{W} \overline{\times}| \mathbf{T}}{\lfloor\times \mathbf{T}} \tag{558}$$

die affinoranalytische Form der Eulerschen Gleichungen.

In bezug auf ein festes Achsensystem kann die Lage des Körpers zu jeder Zeit gegeben werden durch den Rotator $\mathbf{R}$, der die Drehung in bezug auf einen beliebigen Anfangszustand angibt. Es ist dann nach (541):

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{w} \urcorner \mathbf{R}. \tag{541}$$

Sind keine äußeren Kräfte vorhanden, so ist nach (279 d) und S. 148:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{b}}{\lfloor\times \mathbf{T}} = \mathbf{b}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{b}\mathbf{R}\mathbf{T}_a{}^{-1}\mathbf{R}^{-1}, \tag{559}$$

und die Differentialgleichung der Bewegung lautet also:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = (\mathbf{b}\mathbf{R}\mathbf{T}_a{}^{-1}\mathbf{R}^{-1}) \urcorner \mathbf{R}.\text{[1]} \tag{560}$$

Lagerkräfte. Rotiert ein Körper um einen anderen Punkt als den Schwerpunkt, so wird er im allgemeinen eine veränderliche Kraft auf den Punkt ausüben (Fig. 19). Nach (542 a), (533) und (366) ist die auf O ausgeübte Kraft:

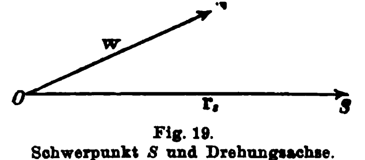


Fig. 19.
Schwerpunkt S und Drehungsachse.

$$\begin{cases} -\mathbf{k} = -M\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = -M\left(\frac{d\mathbf{w}}{dt} \times \mathbf{r}_s + \mathbf{w} \times \frac{d\mathbf{r}_s}{dt}\right) \\ \quad = -M\left\{\frac{d\mathbf{w}}{dt} \times \mathbf{r}_s + (\mathbf{w} \urcorner \mathbf{w})\mathbf{r}_s\right\} \quad \text{(nach (173 b))} \\ \quad = -M\left(\frac{d\mathbf{w}}{dt} \times \mathbf{r}_s + \mathbf{W} \overline{\times}| \mathbf{r}_s\right) \quad \text{(nach (249))} \end{cases} \tag{561}$$

Der zweite Bestandteil der Kraft, der nicht null ist bei konstanter Winkelgeschwindigkeit, ist die Zentrifugalkraft:

$$\mathbf{k}_s = -M\mathbf{W} \overline{\times}| \mathbf{r}_s. \tag{562}$$

Die Zentrifugalkraft ist also das vektoraffinorische Produkt des Drehungstensors und des Radiusvektors des Schwerpunkts, wobei der feste Punkt als Bezugspunkt zu wählen ist.

Rotiert ein Körper um eine feste Achse, so lassen sich die Lager-

1) Die Assoziationsänderungen, die erforderlich sind um diese Gleichung einfacher zu gestalten, erfordern Multiplikationen höherer Ordnung (vgl. S. 148).

kräfte wie folgt berechnen. Man nehme O irgendwo in der Achse. Die totale auf die Lager ausgeübte Kraft ist dann offenbar, wie oben:

$$-\mathbf{k} = -M\left(\frac{d\mathbf{w}}{dt} \times \mathbf{r}_s + \mathbf{W} \overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{r}_s\right). \tag{561}$$

Das totale Moment der auf die Lager ausgeübten Kräfte in bezug auf O berechnet sich nach (543), (547), (366), (539), (234), (239) und (241) zu:

$$-\mathbf{m} = -\frac{d\mathbf{b}}{dt} = -\frac{d\mathbf{T}\mathbf{w}}{dt} = -\mathbf{T}\frac{d\mathbf{w}}{dt} - (\mathbf{w} \times \mathbf{T})\mathbf{w} \tag{563}$$

$$= -\mathbf{T}\frac{d\mathbf{w}}{dt} - \mathbf{W} \overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{T}.$$

Der erste Teil hat die Richtung der Achse, und wird bei konstanter Winkelgeschwindigkeit Null. Der zweite Teil, das Moment der Zentrifugalkräfte:

$$\mathbf{m}_s = -\mathbf{W} \overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{T} \tag{564}$$

wird Null, wenn die Achse mit einer Hauptrichtung von $\mathbf{T}$ zusammenfällt, da dann alle Hauptrichtungen von $\mathbf{W}$ und $\mathbf{T}$ zusammenfallen, das Produkt demnach keinen Vektor enthalten kann. Das Moment der Zentrifugalkräfte, ausgeübt auf eine feste Achse, in bezug auf einen Punkt der Achse, ist also das vektoraffinorische Produkt des Drehungstensors und des Trägheitstensors in diesem Punkte.

Stöße. Wird auf einen freien starren Körper im Punkte $\mathbf{s}$ vom Schwerpunkt aus gerechnet ein Stoß $\mathbf{p} = \mathbf{k}\,dt$ ausgeübt, so ist die entstehende Bewegung nach (543) gegeben durch:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{p} \\ \mathbf{b} = \mathbf{p} \times \mathbf{s}. \end{cases} \tag{565}$$

Die Geschwindigkeit, die ein Punkt in der Entfernung $\mathbf{r}$ vom Schwerpunkt infolge des Stoßes bekommt, ist:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{w} \times \mathbf{r},$$

wo:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\mathbf{p}}{M} \tag{566}$$

ist, und ferner nach (239) und (240):

$$\begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{b}\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{p} \times \mathbf{s})\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{p}(\mathbf{s} \rceil \mathbf{T}^{-1}) \\ \mathbf{w} \times \mathbf{r} = \mathbf{p}(\mathbf{s} \rceil \mathbf{T}^{-1} \rceil \mathbf{r}). \end{cases} \tag{567}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(568)\quad \begin{cases} \mathfrak{v} = \mathfrak{p}\left(\mathfrak{s} \urcorner \mathrm{T}^{-1} \urcorner \mathfrak{r} + \frac{\mathrm{I}}{M}\right) \\ \quad = \mathfrak{p}\,\mathrm{C}_{\mathfrak{s}\mathfrak{r}}, \end{cases}$$

wo $\mathrm{C}_{\mathfrak{s}\mathfrak{r}}$ ein Affinor ist, der nur von der Massenverteilung des Körpers und der Lage der durch $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ gegebenen Punkte abhängt. Da T ein Tensor ist, ist nach (242b):

$$(569)\quad \mathrm{C}_{\mathfrak{s}\mathfrak{r}} = \mathrm{K}\,\mathrm{C}_{\mathfrak{r}\mathfrak{s}}.$$

Erteilt man also dem Körper einen Stoß $\mathfrak{p}'$ in einem durch $\mathfrak{r}$ gegebenen Punkte, so ist die Geschwindigkeit, die der durch $\mathfrak{s}$ gegebene Punkt dadurch erhält:

$$(570)\quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{p}'\,\mathrm{C}_{\mathfrak{r}\mathfrak{s}}$$

und es ist also nach (244):

$$(571)\quad \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{p}' = (\mathfrak{p}\,\mathrm{C}_{\mathfrak{s}\mathfrak{r}}) \cdot \mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cdot (\mathrm{C}_{\mathfrak{s}\mathfrak{r}}\mathfrak{p}') = \mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{p}'\,\mathrm{C}_{\mathfrak{r}\mathfrak{s}}) = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{v}'$$

(Satz von der Gegenseitigkeit der Stoßgeschwindigkeiten).

Bewegungsgleichungen des Kreisels. Es drehe sich ein starrer Körper um einen nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfallenden festen Punkt, und es wirke nur die Schwere auf ihn. Sind $\mathfrak{r}_{sa}$ und T_a die Anfangswerte des Radiusvektors des Schwerpunktes bzw. des Trägheitstensors, inbezug auf den festen Punkt, so sind die Werte dieser Größen zu einer beliebigen Zeit t:

$$(572)\quad \mathfrak{r}_s = \mathrm{R}\,\mathfrak{r}_{sa}$$

bzw.:

$$(573)\quad \mathrm{T} = \mathrm{R}\,\mathrm{T}_a\,\mathrm{R}^{-1},$$

wo R ein mit der Zeit veränderlicher Rotator ist, der die Lage des Körpers in jedem Augenblick bestimmt. Nach (543), (572) und (241) ist:

$$(574)\quad \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{b}}{dt} = M\mathfrak{g} \times \mathfrak{r}_s = M\mathfrak{g} \times \mathrm{R}\,\mathfrak{r}_{sa} &= -M\mathrm{R} \;\overline{\times}\!\urcorner\; (\mathfrak{r}_{sa}\mathfrak{g}) \\ &= M(\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}_{sa}) \;\overline{\times}\!\urcorner\; \mathrm{R}^{-1}, \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{g}$ die Schwerkraft pro Masseneinheit ist. Nach (539) ist:

$$(575)\quad \frac{d\mathrm{R}}{dt} = \mathfrak{w} \urcorner \mathrm{R}$$

und nach (547) und S. 148:

$$(576)\quad \mathfrak{b} = \mathfrak{w}\mathrm{T} = \mathfrak{w}\,\mathrm{R}\,\mathrm{T}_a\,\mathrm{R}^{-1}.$$

Durch Elimination von $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{b}$ aus (574), (575) und (576) entsteht eine Differentialgleichung in R. Diese Elimination gelingt sehr einfach unter Anwendung von (233) und (242a). Denn, wo nach (575) und (366):

(577) $$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{w}}{dt} \urcorner \mathbf{R} + \mathbf{w} \urcorner \mathbf{w} \urcorner \mathbf{R}$$

ist, ist nach (233), (281) und (314):

$$\mathbf{R} \urcorner \mathrm{K}\left(\frac{d\mathbf{w}}{dt} \urcorner \mathbf{R}\right) = -\mathbf{R} \urcorner \mathbf{R}_k \urcorner \frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\mathbf{I} \urcorner \frac{d\mathbf{w}}{dt},$$

und nach (242a), (281) und (314):

$$\mathbf{R} \urcorner \mathrm{K}(\mathbf{w} \urcorner \mathbf{w} \urcorner \mathbf{R}) = \mathbf{R} \urcorner \mathbf{R}_k \urcorner \mathbf{w} \urcorner \mathbf{w} = \mathbf{w} \urcorner \mathbf{w}.$$

Es ist also:

(578) $$\mathbf{R}\frac{d^2\mathbf{R}_k}{dt^2} = -\mathbf{J} \urcorner \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{w} \urcorner \mathbf{w},$$

oder bei Multiplikation mit $\mathbf{T}_\circ$ nach (249):

(579) $$\mathbf{T}_\circ \,\overline{\times}\!\rceil \left(\mathbf{R}\frac{d^2\mathbf{R}_k}{dt^2}\right) = -\mathbf{T}\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{T}_\circ \,\overline{\times}\!\rceil\, (\mathbf{w} \urcorner \mathbf{w}).$$

Nach (547), (366) und (539) ist nun:

$$\frac{d\mathfrak{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{w}}{dt}\mathbf{T} + \mathbf{w}(\mathbf{w} \times \mathbf{T}),$$

oder nach (234) und (241):

(580) $$\frac{d\mathfrak{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{w}}{dt}\mathbf{T} + (\mathbf{w}\mathbf{w}) \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{T}.$$

Da $\mathbf{w}\mathbf{w}$ und $\mathbf{T}$ Tensoren sind, ist aber nach der Bedeutung von $\llcorner\!\times$ und $\overline{\times}\!\rceil$:

$$(\mathbf{w}\mathbf{w}) \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{T} = -\mathbf{T}_\circ \,\overline{\times}\!\rceil\, (\mathbf{w} \urcorner \mathbf{w}),$$

und also nach (579):

(581) $$\frac{d\mathfrak{b}}{dt} = -\mathbf{T}_\circ \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{R}\frac{d^2\mathbf{R}_k}{dt^2},$$

oder nach (574), (237), (573) und (280):

(582) $$\mathrm{V}M\mathbf{g}\mathbf{r}_{sa}\mathbf{R}_k = -\mathrm{V}\mathbf{R}\mathbf{T}_{a\circ}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\frac{d^2\mathbf{R}_k}{dt^2}$$
$$= -\mathrm{V}\mathbf{R}\mathbf{T}_{a\circ}\frac{d^2\mathbf{R}_k}{dt^2}.^{1)}$$

Deformation eines homogenen Mediums. Es sei $\mathbf{v}$ die Verrückung des durch den Radiusvektor $\mathbf{r}$ bestimmten Punktes P:

(583) $$\mathbf{v} = f(\mathbf{r}).$$

Die relative Verrückung eines Teilchens des Differentialraumelements

1) Vgl. die Bemerkung zu (560), S. 219. Für den Fall, daß das Trägheitsellipsoid ein Rotationskörper in bezug auf die Achse von $\mathbf{s}$ ist, läßt sich mit einfacheren vektoranalytischen Mitteln eine Differentialgleichung in $\mathbf{r}_s$ ableiten. (Siehe Föppl 03. 4.)

um P, in einer Entfernung $d\mathfrak{r}$ von P, in bezug auf P, ist nach (346)

$$\begin{aligned} d\mathfrak{v} &= -d\mathfrak{r}(\nabla\mathfrak{v}) \\ &= -\tfrac{1}{3}d\mathfrak{r}\ \mathrm{conv}\ \mathfrak{v} - \tfrac{1}{2}d\mathfrak{r} \times \mathrm{rot}\ \mathfrak{v} - d\mathfrak{r} \mathbin{X} \mathrm{dev}\ \mathfrak{v}. \end{aligned}$$

Ist die Deformation klein, so entspricht $-\frac{1}{3}d\mathfrak{r}\ \mathrm{conv}\ \mathfrak{v}$ einer nach allen Seiten gleichmäßigen Ausdehnung, $-\frac{1}{2}d\mathfrak{r} \times \mathrm{rot}\ \mathfrak{v}$ einer reinen Drehung um den Vektor rot $\mathfrak{v}$ als Achse, und $-d\mathfrak{r} \mathbin{X} \mathrm{dev}\ \mathfrak{v}$ einer reinen Deviation, die die Hauptrichtungen von dev $\mathfrak{v}$ bestehen läßt.

Die Deformation des Differentialraumelements ist vollständig gegeben durch den Affinor:

(584) $$\mathbf{A} = \nabla\mathfrak{v} = \alpha\ \mathrm{conv}\ \mathfrak{v} + \beta\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{v} + \mathrm{dev}\ \mathfrak{v}.$$

Spannungen. Ist das Medium ein elastisches, so treten bei der Deformation Spannungen auf. Es seien die Kräfte, die pro Flächeneinheit auf die Seitenflächen eines beliebigen Differentialtetraeders durch die Umgebung ausgeübt werden:

$$\mathfrak{p}_a,\quad \mathfrak{p}_b,\quad \mathfrak{p}_c,\quad \mathfrak{p}_d,$$

und die nach außen gerichteten Einheitsnormalen:

$$\mathfrak{n}_a,\quad \mathfrak{n}_b,\quad \mathfrak{n}_c,\quad \mathfrak{n}_d.$$

Sind die Inhalte der Seitenflächen:

$$d\sigma_a,\quad d\sigma_b,\quad d\sigma_c,\quad d\sigma_d,$$

so sind:

$$\mathfrak{n}_a\, d\sigma_a,\quad \mathfrak{n}_b\, d\sigma_b,\quad \mathfrak{n}_c\, d\sigma_c,\quad \mathfrak{n}_d\, d\sigma_d$$

die als Vektoren aufgefaßten Seitenflächen eines Polyeders, deren Summe bekanntlich Null ist. Es ist also:

(585) $$\mathfrak{n}_a\, d\sigma_a + \cdots + \mathfrak{n}_d\, d\sigma_d = 0.$$

Andererseits muß aber die Summe sämtlicher Flächenkräfte Null sein, da die Kräfte, die auf das Volumelement wirken, mit der dritten Potenz der Dimension abnehmen, also bei einem Differentialraumelement den Flächenkräften gegenüber verschwinden. Es ist also:

(586) $$\mathfrak{p}_a\, d\sigma_a + \cdots + \mathfrak{p}_d\, d\sigma_d = 0$$

und demnach:

(587) $$\mathfrak{p}_d = (\mathfrak{p}_a\mathfrak{n}_a' + \mathfrak{p}_b\mathfrak{n}_b' + \mathfrak{p}_c\mathfrak{n}_c')\mathfrak{n}_d,$$

wo $\mathfrak{n}_a'$, $\mathfrak{n}_b'$ und $\mathfrak{n}_c'$ die zu $\mathfrak{n}_a$, $\mathfrak{n}_b$ und $\mathfrak{n}_c$ reziproken Vektoren sind (vgl. S. 129). Sind also die Spannungen auf drei verschiedenen Flächen gegeben, so läßt sich die Spannung auf jeder beliebigen anderen berechnen, und zwar ist $\mathfrak{p}$ eine lineare Funktion der Normalen $\mathfrak{n}$:

(588) $$\mathfrak{p} = -\mathfrak{n}\mathbf{B}.$$

Der Spannungszustand in einem Differentialraumelement ist vollständig gegeben durch den Affinor $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = -B_{11}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 - B_{23}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 - B_{32}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 - \text{cycl.} \tag{589}$$

Um uns seine Bedeutung auch in Koordinaten klarzulegen, betrachten wir einen Differentialwürfel mit Seitenflächen in Richtung der Koordinatenachsen. Die Kraft, die pro Flächeneinheit ausgeübt wird auf die Fläche, deren äußere Normale z. B. die Richtung von $\mathbf{i}_1$ hat, ist nach (589) gleich:

$$\mathbf{p} = -\mathbf{i}_1\mathbf{B} = -B_{11}\mathbf{i}_1 - B_{12}\mathbf{i}_2 - B_{13}\mathbf{i}_3.$$

B_{11}, B_{12} und B_{13} stellen also die absoluten Werte der Normaldruckspannung und der Tangentialspannung in der -2- bzw. -3-Richtung dar, und sind demnach identisch mit den Größen, die viel X_x, Y_x und Z_x genannt werden.

Beziehungen zwischen Deformation und Spannung. In dem Differentialraumelemente um P ist die Deformation gegeben durch den Affinor $\mathbf{A} = \nabla\mathbf{v}$, die Spannung durch den Affinor $\mathbf{B}$. Der Zusammenhang zwischen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ist, je nach der Art des deformierten Mediums verschieden. Nehmen wir an, daß die Deformation sehr klein ist und das Medium dem Hookeschen Gesetz folgt, d. h. die Deformation eine lineare Funktion der Spannung ist, so ist, da jeder Affinor von neun unabhängigen Zahlen abhängt, die Wirkung des Mediums höchstens durch 81 Parameter charakterisiert. Diese bestimmen einen Operator der Analysis vierter Ordnung, der die Orientierungsweise des allgemeinsten Quotienten zweier Affinoren besitzt, also (vgl. S. 88 und 89) drei Skalare, sechs Vektoren, sechs Deviatoren, drei Septoren und einen Nonor enthält, deren Wirkung folgender Tabelle zu entnehmen ist:

	S	V	D
S	$S\cdot$	$V\cdot$	$D\cdot$
V	$V\cdot$	$S\cdot,\ V\times,\ D\,\mathsf{X}$	$V\times,\ D\,\mathsf{X},\ St\overset{1}{\multimap}$
D	$D\cdot$	$V\times,\ D\,\mathsf{X},\ St\overset{2}{\multimap}$	$S\cdot,\ V\times,\ D\,\mathsf{X},\ St\overset{3}{\multimap},\ N\overset{4}{\multimap}$

$\overset{1}{\multimap}$, $\overset{2}{\multimap}$, $\overset{3}{\multimap}$ und $\overset{4}{\multimap}$ sind Multiplikationen, deren nähere Bestimmung in den Analysen höherer Ordnung zu erfolgen hat. Im Falle eines homogenen isotropen Mediums, das sich Drehungen des Bezugssystems gegenüber gleichgültig verhält, können offenbar nur die drei skalaren Operatoren bestehen bleiben. Die einzig mögliche Beziehung zwischen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ist dann also:

$$
(590)\quad \left\{\begin{aligned}
B_s &= K_0 A_s \\
\mathbf{B}_v &= K_1 \mathbf{A}_v \\
\mathbf{B}_d &= K_2 \mathbf{A}_d \\
\mathbf{B} &= \alpha K_0 \operatorname{conv} \mathbf{v} + \beta K_1 \operatorname{rot} \mathbf{v} + K_2 \operatorname{dev} \mathbf{v},
\end{aligned}\right.
$$

wo K_0, K_1 und K_2 die zu den Deformationen nullter, erster und zweiter Ordnung gehörigen Elastizitätskonstanten nullter, erster und zweiter Ordnung sind. Infolge (227), (588) und (590) ergibt sich:

$$
(591)\quad \mathbf{p} = -\mathbf{n}\mathbf{B} = -\tfrac{1}{3} K_0 \mathbf{n} \operatorname{conv} \mathbf{v} - \tfrac{1}{2} K_1 \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} - K_2 \mathbf{n} \times \operatorname{dev} \mathbf{v}.
$$

Durch diese Formel wird die Spannung in die drei zu den Deformationen verschiedener Ordnung gehörigen Komponenten zerlegt.

Die gewöhnliche Elastizitätstheorie. In der gewöhnlichen Elastizitätstheorie wird ein Medium betrachtet, das Drehungen der kleinsten Teile nicht widersteht, wo also $K_1 = 0$ ist. Damit hängt zusammen, daß man dort nur die Deformationen nullter und zweiter Ordnung sehr klein anzunehmen braucht, die Drehungen aber nicht. Der sich hier als der für ein isotropes homogenes Medium als allgemeinster ergebende Fall ist also eine Erweiterung des gewöhnlichen Falles. Nachdem solche Erweiterungen schon von verschiedenen Autoren angestrebt waren[1]), wurde die hier betrachtete näher ausgearbeitet durch Witte[2]) 1908 und unabhängig durch Somigliano[3]) 1910, und zwar geschah die Darstellung in Komponenten. Eine direkte Darstellung ist nur mit Hilfe der Affinoranalysis möglich. Sie gestaltet sich durch die reine Trennung der Vorgänge verschiedener Ordnung besonders einfach. Als Beispiel für die Anwendung der Affinoranalysis ist die Theorie des allgemeinen isotropen elastischen Mediums besonders geeignet, und da es jederzeit möglich ist, auf die gewöhnliche Theorie zurückzukommen, indem man die Konstante K_1 Null setzt und endliche Drehungen zuläßt, wollen wir die Rechnung unter dieser allgemeinsten Voraussetzung fortsetzen.[4])

Die Gleichgewichtsbedingung. Ist die Kraft pro Masseneinheit, die in P auf den deformierten Körper wirkt, $\mathbf{g}$, und die Dichte ϱ, so ist für ein Differentialraumelement $d\tau$ um P:

$$
(592)\quad \left\{\begin{aligned}
\varrho \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} d\tau &= \varrho \mathbf{g}\, d\tau - \int_\sigma \mathbf{n}\mathbf{B}\, d\sigma \\
&= \varrho \mathbf{g}\, d\tau - \operatorname{Conv} \mathbf{B}\, d\tau \qquad \text{(nach (451))}
\end{aligned}\right.
$$

1) S. Literaturangaben bei Somigliano 10.10, S. 44.

2) 08.8, S. 252. 3) 10.10.

4) Die Beziehungen zwischen den Konstanten nullter und zweiter Ordnung,

und zwar für jedes Element, sodaß:

(593)
$$\varrho \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} = \varrho \mathbf{g} - \operatorname{Conv} \mathbf{B}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet also:

(594)
$$\varrho \mathbf{g} - \operatorname{Conv} \mathbf{B} = 0.$$

Die auf das Volumelement wirkende elastische Kraft $\mathbf{k}_e$, ist:

(595)
$$\begin{cases} \mathbf{k}_e = -\varrho \mathbf{g} = -\operatorname{Conv} \mathbf{B} \\ = -\frac{1}{3} K_0 \operatorname{conv} \operatorname{conv} \mathbf{v} - \frac{1}{2} K_1 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} - K_2 \operatorname{dev} \operatorname{dev} \mathbf{v} \text{ (nach (363))} \\ = -(\frac{1}{3} K_0 + \frac{2}{3} K_2) \operatorname{conv} \operatorname{conv} \mathbf{v} - (\frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} \text{ (nach (425))}. \end{cases}$$

K_0 und K_2 und den von verschiedenen Autoren verwendeten λ und μ, θ und K, E und G, η, m, Ω^2 und ω^2 sind folgende:

	K_0, K_2	λ, μ	θ, K	E, G
K_0, K_2		$K_0 = 3\lambda + 2\mu$ $K_2 = 2\mu$	$K_0 = 2K(3\theta + 1)$ $K_2 = 2K$	$K_0 = \frac{EG}{3G - E}$ $K_2 = 2G$
λ, μ (Lamé)	$\lambda = \frac{K_0 - K_2}{3}$ $\mu = \frac{K_2}{2}$		$\lambda = 2K\theta$ $\mu = K$	$\lambda = G\frac{E - 2G}{3G - E}$ $\mu = G$
θ, K (Kirchhof)	$\theta = \frac{K_0 - K_2}{3K_2}$ $K = \frac{K_2}{2}$	$\theta = \frac{\lambda}{2\mu}$ $K = \mu$		$\theta = \frac{1}{2}\frac{E - 2G}{3G - E}$ $K = G$
E, G (Young, Föppl)	$E = \frac{3K_0 K_2}{2K_0 + K_2}$ $G = \frac{K_2}{2}$	$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ $G = \mu$	$E = \frac{2K(1 + 3\theta)}{2\theta + 1}$ $G = K$	
$\eta = \frac{1}{m}$ (Poisson, Föppl)	$\eta = \frac{K_0 - K_2}{2K_0 + K_2}$	$\eta = \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu}$	$\eta = \frac{\theta}{2\theta + 1}$	$\eta = \frac{E - 2G}{2G}$
Ω^2 (Cerruti)	$\Omega^2 = \frac{K_0 + 2K_2}{3\varrho}$	$\Omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}$	$\Omega^2 = \frac{2K\theta + 2K}{\varrho}$	$\Omega^2 = \frac{G}{\varrho} \cdot \frac{E - 4G}{E - 3G}$
ω^2 (Cerruti)	$\omega^2 = \frac{K_2}{2\varrho}$	$\omega^2 = \frac{\mu}{\varrho}$	$\omega^2 = \frac{K}{\varrho}$	$\omega^2 = \frac{G}{\varrho}$

Energiegleichungen. Wirken auf die Oberfläche des Körpers Spannungen $\mathfrak{p}_a$ und im Inneren auf die Massenelemente äußere Kräfte $\varrho\mathfrak{g}$, so ist bei einer Änderung der Verrückung $\mathfrak{v}$ des Körpers um $d\mathfrak{v}$ die zugeführte Energie:

$$dL = -\int_\tau \varrho\mathfrak{g}\cdot d\mathfrak{v}\,d\tau - \int_\sigma \mathfrak{p}_a\cdot d\mathfrak{v}\,d\sigma, \tag{596}$$

oder nach (594) und (591):

$$\left\{\begin{aligned} dL &= -\int_\tau \operatorname{Conv}\mathbf{B}\cdot d\mathfrak{v}\,d\tau + \int_\sigma (\mathfrak{n}\mathbf{B})\cdot d\mathfrak{v}\,d\sigma \\ &= -\int_\tau \operatorname{Conv}\mathbf{B}\cdot d\mathfrak{v}\,d\tau + \int_\sigma \mathfrak{n}\cdot(\mathbf{B}\,d\mathfrak{v})\,d\sigma \quad \text{(nach (244))} \\ &= \int_\tau \{-\operatorname{Conv}\mathbf{B}\cdot d\mathfrak{v} + \operatorname{conv}(\mathbf{B}\,d\mathfrak{v})\}\,d\tau \quad \text{(nach (447))} \\ &= \int_\tau \mathbf{B}_k \boxdot \operatorname{grad} d\mathfrak{v}\,d\tau \quad \text{(nach (401)).} \end{aligned}\right. \tag{597}$$

Die in einem Volumelement während dieses Vorganges pro Volumeinheit aufgespeicherte Energie ist also, von Energieverlusten abgesehen:

$$dW = \mathbf{B}_k \boxdot \operatorname{grad} d\mathfrak{v}. \tag{598}$$

Wachsen die Spannungen von o bis $\mathfrak{p}_a$ und gleichzeitig die Massenkräfte von o bis $\varrho\mathfrak{g}$, so ist die während dieses Vorganges pro Volumeinheit aufgespeicherte Energie, da die Verrückungen stets den Spannungen und Kräften proportional bleiben:

$$\left\{\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2}\mathbf{B}_k \boxdot \operatorname{grad}\mathfrak{v} = \tfrac{1}{2}\mathbf{A}\boxdot\mathbf{B}_k \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}A_0 \operatorname{conv}\mathfrak{v}\operatorname{conv}\mathfrak{v} - \tfrac{1}{2}A_1 \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{v} + \tfrac{1}{2}A_2 \operatorname{dev}\mathfrak{v}\cdot\operatorname{dev}\mathfrak{v}\right) \\ &\qquad \text{(nach (246)).} \end{aligned}\right. \tag{599}$$

Für den Fall der gewöhnlichen Elastizitätstheorie, wo $K_1 = 0$, geht diese Gleichung über in die affinoranalytische Form der Helmholtzschen Normalform für die potentielle Energie.

Nehmen wir an, daß die aufgespeicherte Energie im Volumelement nur Funktion ist von dem augenblicklichen Werte von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, eine Annahme, die sich thermodynamisch begründen läßt, so ist W unabhängig von dem Wege, auf welchem die Formänderung zustande gekommen ist, und (599) gibt also allgemein die elastische Energie als Funktion von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ an. dW ist die Änderung des elastischen Potentials.

Das Bettische Theorem der Reziprozität. Betrachtet man zwei Spannungszustände eines und desselben Systems, den einen mit den Kräften und Spannungen $\varrho\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}_a$ und den zugehörigen Deformations-

größen $\mathfrak{v}$ und $\mathbf{A}$, den anderen mit $\varrho\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{p}_a'$ und den zugehörigen Deformationsgrößen $\mathfrak{v}'$ und $\mathbf{A}'$, dann berechnet sich die Arbeit pro Volumeinheit, die die Kräfte und Spannungen des ersten Zustandes bei den Verrückungen des zweiten pro Volumelement leisten würden in derselben Weise wie oben zu:

$$\mathbf{A}' \boxdot \mathbf{B}_k.$$

Umgekehrt würden die Kräfte und Spannungen des zweiten Zustandes bei den Verrückungen des ersten die Arbeit

$$\mathbf{A} \boxdot \mathbf{B}_k'$$

leisten. Da aber nach (246)

$$\begin{aligned}(600)\quad \mathbf{A}' \boxdot \mathbf{B}_k &= \tfrac{1}{3} K_0 \operatorname{conv} \mathfrak{v}' \operatorname{conv} \mathfrak{v} - \tfrac{1}{2} K_1 \operatorname{rot} \mathfrak{v}' \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} + K_2 \operatorname{dev} \mathfrak{v}' \cdot \operatorname{dev} \mathfrak{v}\\ &= \mathbf{A} \boxdot \mathbf{B}_k'\end{aligned}$$

ist, sind beide Arbeitsmengen gleich. Es ist demnach:

$$(601)\qquad \int_\tau \varrho\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{v}' d\tau + \int_\sigma \mathfrak{p}_a \cdot \mathfrak{v}' d\sigma = \int_\tau \varrho\mathfrak{g}' \cdot \mathfrak{v} d\tau + \int_\sigma \mathfrak{p}_a' \cdot \mathfrak{v} d\sigma.$$

(Bettisches Theorem der Reziprozität.)

Die Komptabilitätsbedingungen. Das Feld des Spannungsaffinors genügt im Falle des Gleichgewichts der Bedingung:

$$(594)\qquad \varrho\mathfrak{g} = \operatorname{Conv} \mathbf{B}.$$

Die Massenkräfte sind also die Senken des Feldes des Spannungsaffinors.

Auf der Begrenzungsfläche ist

$$(591)\qquad \mathfrak{p}_a = -\mathfrak{n}\mathbf{B}.$$

Die Oberflächenspannungen sind demnach die Flächensenken auf der Begrenzungsfläche des Feldes des Spannungsaffinors.

Wären nun auch die Wirbel und Flächenwirbel bekannt, so könnte das Feld $\mathbf{B}$, damit $\mathbf{A}$, und also nach (460) bis auf eine Konstante $\mathfrak{v}$ angegeben werden (wenn wenigstens $\mathfrak{v}$ stetig und τ einfach zusammenhängend ist, also z. B. kein Ringkörper). Die Wirbel und Flächenwirbel sind nun nicht bekannt, statt dessen existiert aber die Bedingung, daß $\mathbf{B}$ vermittels der Konstanten K_0, K_1 und K_2 aus dem Gradientfeld eines Vektorfeldes ableitbar ist. Diese Bedingung, die sogenannte Komptabilitätsbedingung der Spannungen, die das Affinorfeld auf ein Vektorfeld zurückführt, würde in Koordinaten zerlegt $9 - 3 = 6$ unabhängige Gleichungen erfordern. Affinoranalytisch gestaltet sich ihre Darstellung sehr einfach.

Nach der Bedeutung von $\urcorner$ ist doch:

$$\text{(602)}\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{Rot}\mathbf{B} &= \tfrac{2}{3}\beta K_0 \operatorname{conv}\operatorname{conv}\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}\beta K_1 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} - \beta K_2 \operatorname{dev}\operatorname{dev}\mathbf{v} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}K_2 \operatorname{rot}\operatorname{dev}\mathbf{v} - \tfrac{1}{2}K_1 \operatorname{dev}\operatorname{rot}\mathbf{v} \\ &= \tfrac{2}{3}\beta(K_1 - K_2)\operatorname{conv}\operatorname{conv}\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}\beta(K_1 - K_2)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(K_2 - K_1)\operatorname{dev}\operatorname{rot}\mathbf{v} \qquad \text{(nach (422) und (425))}. \end{aligned}\right.$$

Da aber nach (362):

$$\operatorname{grad}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \beta \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} + \operatorname{dev}\operatorname{rot}\mathbf{v},$$

ist, so folgt:

$$\mathrm{K}\operatorname{Rot}\mathbf{B} = -\tfrac{2}{3}\beta(K_0 - K_2)\operatorname{conv}\operatorname{conv}\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}(K_2 - K_1)\operatorname{grad}\operatorname{rot}\mathbf{v},$$

und infolge von (427), (146) und (147):

$$\text{(603)}\qquad \operatorname{Rot}\mathrm{K}\operatorname{Rot}\mathbf{B} = -\tfrac{1}{3}(K_0 - K_2)\operatorname{Rot}\operatorname{conv}\operatorname{conv}\mathbf{v}.$$

Es ist zu beachten, daß K_1 in dieser Gleichung nicht vorkommt. Sie stellt also gleich die Komptabilitätsbedingung der Spannungen für den Fall der gewöhnlichen Elastizitätslehre dar. Aus ihr leitet sich für $K_0 = K_2 = 1$ die Gleichung ab:

$$\text{(604)}\qquad \operatorname{Rot}\mathrm{K}\operatorname{Rot}\mathbf{A} = 0,$$

die affinoranalytische Form der Komptabilitätsbedingung der Deformationen der gewöhnlichen Elastizitätslehre.

Die Beltramische Form der Komptabilitätsbedingung der Spannungen, die eine Beziehung zwischen $\nabla^2\cdot\mathbf{B}$, B_s und $\varrho\mathbf{g}$ herstellt, leitet sich folgendermaßen aus (603) ab. Nach (602) und (362) ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{Rot}\mathbf{B} = \tfrac{2}{3}\beta(K_0 - K_2)\operatorname{conv}\operatorname{conv}\mathbf{v} + \beta(K_1 - K_2)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} \\ + \tfrac{1}{2}(K_2 - K_1)\operatorname{grad}\operatorname{rot}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Da aber nach (590):

$$\text{(605)}\quad \operatorname{Rot}\operatorname{Conv}\mathbf{B} = \tfrac{1}{3}(K_0 + 2K_2)\operatorname{Rot}\operatorname{conv}\operatorname{conv}\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}(K_1 + K_2)\operatorname{Rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}$$

ist, so folgt für den gewöhnlichen Fall, wo $K_1 = 0$ ist:

$$\text{(606)}\qquad \operatorname{Rot}\operatorname{Rot}\mathbf{B} = -\operatorname{Rot}\operatorname{Conv}\mathbf{B} + \tfrac{1}{3}(2K_0 + K_2)\operatorname{Rot}\operatorname{conv}\operatorname{conv}\mathbf{v}.$$

Unter Berücksichtigung von (431) entsteht also:

$$\begin{aligned} \text{(607)}\quad \nabla^2\cdot\mathbf{B} &= \operatorname{grad}\operatorname{Conv}\mathbf{B} - \operatorname{Rot}\operatorname{Conv}\mathbf{B} + \frac{2K_0 + K_2}{3K_0}\operatorname{Rot}\operatorname{conv}B_s \\ &= -2\varrho\nabla \underset{0}{\perp} \mathbf{g} + \frac{2K_0 + K_2}{3K_0}\operatorname{Rot}\operatorname{conv}B_s, \end{aligned}$$

die affinoranalytische Form der Beltramischen Gleichungen.

Die Formeln von Betti für die Verrückung, die Konvergenz und die Rotation. Nach (503) ist:

$$(608)\qquad 4\pi\mathfrak{v} = \operatorname{Conv}\int_\tau \frac{\operatorname{grad}\mathfrak{v}}{a_m}\,d\tau - \operatorname{Conv}\int_\sigma \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{v}}{a_m}\,d\sigma.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit K_2, und zählt man die aus (594) und (487) bzw. (588) hervorgehenden Gleichungen

$$(609)\qquad 0 = \int_\tau \frac{\varrho\mathfrak{g}}{a_m}\,d\tau - \int_\sigma \frac{\mathfrak{n}\mathbf{B}}{a_m}\,d\sigma - \operatorname{Conv}\int_\tau \frac{\mathbf{B}}{a_m}\,d\tau$$

$$(610)\qquad 0 = \int_\sigma \frac{\mathfrak{p}_a}{a_m}\,d\sigma + \int_\sigma \frac{\mathfrak{n}\mathbf{B}}{a_m}\,d\sigma$$

hinzu, so entsteht:

$$(611)\quad \begin{cases} 4\pi K_2\mathfrak{v} = \displaystyle\int_\tau \frac{\varrho\mathfrak{g}}{a_m}\,d\sigma + \int_\sigma \frac{\mathfrak{p}_a}{a_m}\,d\sigma + \frac{1}{3}(K_2 - K_0)\operatorname{conv}\int_\tau \frac{\operatorname{conv}\mathfrak{v}}{a_m}\,d\tau \\ \qquad + \displaystyle\frac{1}{2}(K_2 - K_1)\operatorname{rot}\int_\tau \frac{\operatorname{rot}\mathfrak{v}}{a_m}\,d\tau - K_2\operatorname{Conv}\int_\sigma \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{v}}{a_m}\,d\sigma, \end{cases}$$

die affinoranalytische Form einer von Betti für $K_1 = 0$ angegebenen Formel für $\mathfrak{v}$. Nimmt man von dieser Gleichung die Konvergenz bzw. die Rotation, so erhält man

$$(612)\quad \begin{cases} 4\pi\left(\frac{2}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_0\right)\operatorname{conv}\mathfrak{v} = \operatorname{conv}\displaystyle\int_\tau \frac{\varrho\mathfrak{g}}{a_m}\,d\tau + \operatorname{conv}\int_\sigma \frac{\mathfrak{p}_a}{a_m}\,d\sigma \\ \qquad - K_2\operatorname{conv}\operatorname{Conv}\displaystyle\int_\sigma \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{v}}{a_m}\,d\sigma \end{cases}$$

$$(613)\quad \begin{cases} 4\pi\left(\frac{1}{2}K_2 + \frac{1}{2}K_1\right)\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \operatorname{rot}\displaystyle\int_\tau \frac{\varrho\mathfrak{g}}{a_m}\,d\tau + \operatorname{rot}\int_\sigma \frac{\mathfrak{p}_a}{a_m}\,d\sigma \\ \qquad - K_2\operatorname{rot}\operatorname{Conv}\displaystyle\int_\sigma \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{v}}{a_m}\,d\sigma, \end{cases}$$

die affinoranalytische Form der verallgemeinerten Formeln von Betti für $\operatorname{conv}\mathfrak{v}$ und $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$.

Die Feldsumme des Spannungsfeldes. Da die Senken und Flächensenken des Feldes des Spannungsaffinors gegeben sind durch $\varrho\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{p}_a$, ist in einem einfach zusammenhängenden Raum, nach (516):

$$(614)\qquad \int_\tau \mathbf{B}\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{r}\varrho\mathfrak{g}\,d\tau + \int_\sigma \mathfrak{r}\mathfrak{p}\,d\sigma.$$

Die Gleichung zerfällt in drei andere:

(615) $$\int\limits_\tau \operatorname{conv} \mathbf{v}\, d\tau = \frac{1}{K_0}\int\limits_\tau \mathbf{r}\cdot \varrho \mathbf{g}\, d\tau + \frac{1}{K_0}\int\limits_\sigma \mathbf{r}\cdot \mathbf{p}\, d\sigma$$

(616) $$\int\limits_\tau \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\tau = \frac{1}{K_1}\int\limits_\tau \mathbf{r}\times \varrho \mathbf{g}\, d\tau + \frac{1}{K_1}\int\limits_\sigma \mathbf{r}\times \mathbf{p}\, d\sigma$$

(617) $$\int\limits_\tau \operatorname{dev} \mathbf{v}\, d\tau = \frac{1}{K_2}\int\limits_\tau \mathbf{r} \mathsf{X} \varrho \mathbf{g}\, d\tau + \frac{1}{K_2}\int\limits_\sigma \mathbf{r} \mathsf{X} \mathbf{p}\, d\sigma,$$

die gestatten, die mittlere Konvergenz, bzw. Rotation, bzw. Deviation unmittelbar aus den angreifenden Kräften zu berechnen. Von diesen Gleichungen wurde die erste von Betti gegeben, die zweite geht für $K_1 = 0$ in die gewöhnliche Gleichgewichtsbedingung der Statik über.

Die elektromagnetischen Feldgleichungen. Die Lorentzschen Formeln für das elektromagnetische Feld lauten:

(618) $$\begin{cases} \text{a)} & \operatorname{conv} \mathbf{d} = -\varrho \\ \text{b)} & \operatorname{conv} \mathbf{h} = 0 \\ \text{c)} & \operatorname{rot} \mathbf{d} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{h}}{dt} \\ \text{d)} & \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c}\left(\frac{d\mathbf{d}}{dt} - \operatorname{conv} \mathbf{d}\mathbf{v}\right), \end{cases}$$

wo $\mathbf{d}$ die dielektrische Verschiebung, $\mathbf{h}$ die magnetische Kraft, ϱ die Volumdichte der positiven Elektrizität, und $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit der Elektronen ist.[1]) Die auf die Einheit der Ladung ausgeübte Kraft ist

$$\mathbf{f} = \mathbf{d} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times \mathbf{h}.\text{[2])}$$

Die Resultante $\mathbf{k}$ der Kräfte, die auf sämtliche Elektronen innerhalb eines Raumteiles τ wirksam sind, ist also:

(619) $$\begin{cases} \mathbf{k} = \int\limits_\tau \varrho\left(\mathbf{d} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{h}\right) d\tau \\ \quad = \int\limits_\tau \left(-\operatorname{conv} \mathbf{d}\mathbf{d} + \operatorname{rot} \mathbf{h}\times\mathbf{h} - \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{d}}{dt}\times\mathbf{h}\right) d\tau \\ \quad = \int\limits_\tau (-\operatorname{conv} \mathbf{d}\mathbf{d} + \operatorname{rot}\mathbf{h}\times\mathbf{h} + \operatorname{rot}\mathbf{d}\times\mathbf{d})\, d\tau - \frac{1}{c}\int\limits_\tau \frac{d(\mathbf{d}\times\mathbf{h})}{dt}\, d\tau. \end{cases}$$

Setzt man

(620) $$c\mathbf{d}\times\mathbf{h} = \mathbf{s}$$

(Poyntingscher Vektor der Strahlung), und ergänzt man die Formel symmetrisch unter Berücksichtigung von (618b):

1) 09.19, S. 12. 2) 09.19, S. 14.

$$(621)\quad \mathbf{k} = \int_\tau (-\operatorname{conv}\mathbf{d}\mathbf{d} + \operatorname{rot}\mathbf{d} \times \mathbf{d} - \operatorname{conv}\mathbf{h}\mathbf{h} + \operatorname{rot}\mathbf{h} \times \mathbf{h})\,d\tau - \frac{1}{c^2}\int_\tau \frac{d\mathbf{s}}{dt}\,d\tau,$$

so ist nach (394) und (396):

$$(622)\quad \begin{cases} \mathbf{k} = \int_\tau \frac{1}{2}\operatorname{Conv}(-\mathbf{d}\mathbf{d} + \mathbf{d} \urcorner \mathbf{d} - \mathbf{h}\mathbf{h} + \mathbf{h} \urcorner \mathbf{h})\,d\tau - \frac{1}{c^2}\int_\tau \frac{d\mathbf{s}}{dt}\,d\tau \\ = \int_\tau \operatorname{Conv}(\mathbf{d} \perp_{\supset} \mathbf{c} + \mathbf{h} \perp_{\supset} \mathbf{h})\,d\tau - \int_\tau \frac{d\mathbf{s}}{dt}\,d\tau \\ = \int_\sigma (\mathbf{d} \perp_{\supset} \mathbf{d} + \mathbf{h} \perp_{\supset} \mathbf{h})\,d\sigma - \int_\tau \frac{d\mathbf{s}}{dt}\,d\tau. \end{cases}$$

Die Größe

$$\mathbf{d} \perp_{\supset} \mathbf{d} + \mathbf{h} \perp_{\supset} \mathbf{h}$$

ist der Tensor der Maxwellschen Spannungen.

Angesichts dieser Beziehungen hat Jaumann 1906 ein neues Produkt von Vektoren gebildet und in seiner Notation angegeben durch:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a}; \mathbf{b} + \mathbf{a} \underset{;}{\times} \mathbf{b}$$

(vgl. S. 123 und 124). Er nannte dieses Produkt die zweite symmetrische Dyade von $\mathbf{a}; \mathbf{b}$. In unserer Darstellung erscheint die Multiplikation $\underset{;}{\times}$ von selbst als eine zum System gehörige, und zwar als untere tensorische:

$$\perp_{\supset} = \tfrac{1}{2}\alpha \cdot - \mathsf{X}$$

(vgl. S. 77 und 95).

Allgemeine Bemerkung zu den affinoranalytischen Gleichungen der Mechanik und Physik. Eine erschöpfende Darstellung sämtlicher Beziehungen zweiter Ordnung der Mechanik und Physik würde, wie kurz auch die verwendete Darstellungsweise ist, den Rahmen dieses Buches weit überschreiten. Obige wenige Beispiele mögen also genügen, den interessierten Mathematiker oder Physiker zu überzeugen von der außerordentlichen Einfachheit sowohl der Formeln als der Ableitungen der Affinoranalysis, und ihn zu überzeugen, daß in der Tat diese Analysis den geometrischen Größen zweiter Ordnung ebenso vollkommen angepaßt ist, wie die Vektoranalysis denen erster Ordnung. Grundsätzlich ist bei diesen Beispielen davon abgesehen, neben den affinoranalytischen Formeln auch die Formeln in Koordinaten oder in anderen Systemen zweiter Orduung anzugeben, denn obwohl dadurch einerseits die Vorzüge der Affinoranalysis bedeutend schärfer hervorgetreten wären, wäre andererseits der benötigte Raum in unzulässiger Weise vergrößert, zumal es dem

Leser ja jederzeit möglich ist, die nicht affinoranalytischen Formeln in den Originalwerken nachzuschlagen.[1])

Zum Schluß soll jetzt noch einer Anwendung der Rechnung mit geometrischen Größen höherer Ordnung Erwähnung getan werden, die sich auf die graphische Darstellung periodischer Erscheinungen bezieht.

Darstellung periodischer Erscheinungen durch geometrische Größen in einer Ebene. Bekanntlich lassen sich einfach harmonische periodische Erscheinungen, das sind solche, die dem Gesetze:

$$a = a_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{623}$$

folgen, durch einen Vektor in einer Ebene darstellen. Nimmt man ein Achsensystem mit zwei zunächst ganz beliebigen Einheiten $\mathbf{i}_1$ und $\mathbf{i}_2$, so kann a dargestellt werden durch den Vektor

$$\mathbf{a} = \beta a_0 \cos\varphi\, \mathbf{i}_1 + \beta a_0 \sin\varphi\, \mathbf{i}_2 \quad \text{(Fig. 20)}, \tag{624}$$

denn die Größe der Komponente von $\mathbf{a}$ in Richtung der sog. Zeitachse, das ist eine Linie, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der Uhrzeigerrichtung dreht und mit der Vertikalen stets den Winkel ωt einschließt, ist zu jeder Zeit gleich:

$$\beta a \cdot \mathbf{i}_z,$$

wo $\mathbf{i}_z$ ein Einheitsvektor in Richtung der Zeitachse ist. $a_m = \beta a_0$ ist der sog. Effektivwert der periodisch veränderlichen Größe a. Aus dieser Darstellung folgt, daß die Summierung zweier einfach harmonischer periodischer Erscheinungen derselben Art und Frequenz erfolgt durch die gewöhnliche vektorische Addition der darstellenden Vektoren.

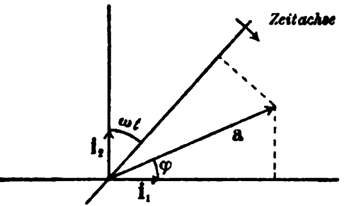


Fig. 20. Darstellung einer sinusförmigen Schwingung durch einen Vektor.

---

1) Bezüglich der Elastizitätslehre, deren Gleichungen für die Beurteilung der Affinoranalysis besonders wichtig sind, wäre für die Formeln in Koordinaten besonders zu verweisen auf Marcolongo, 04.7, Müller und Timpe, 07.6, Tedone, 07.7, und für die Formeln in der Burali Forti-Marcolongoschen Dyadenrechnung auf den zweiten Teil der Analyse vectorielle generale, 13.1. In letzterem ca. 120 Seiten starken Werk sind Anwendungen der direkten Rechnung mit Größen zweiter Ordnung auf die verschiedenen Gebiete der Mechanik und Physik in dankenswerter Fülle zusammengebracht. Leider wirkt dabei die sehr komplizierte Notation der „omografie vettoriali" und die Unmöglichkeit in diesem System die Erscheinung rein in Teile nullter, erster und zweiter Ordnung zu zerlegen, in hohem Maße störend. Bei Übertragung in affinoranalytische Form gestalten sich die Formeln viel einfacher und symmetrischer. Weitere kritische Bemerkungen seien hier unterdrückt, da die „omografie vettoriali" an anderen Stellen dieses Buches genügend besprochen wurden; ein eingehender Vergleich der korrespondierenden Formeln des genannten Werkes und dieses Kapitels sei aber dem Leser sehr empfohlen.

Es ist nun zurzeit in diesen Diagrammen, die für die moderne Wechselstromtechnik die größte Bedeutung haben, gebräuchlich, für die beiden Einheitsvektoren $\mathbf{i}_1$ und $\mathbf{i}_2$ die gewöhnlichen Zahlen 1 und i zu verwenden. Dem steht natürlich nichts im Wege, solange die Größen nur addiert werden, denn bezüglich der Addition haben ja alle Zahlensysteme mit 2 Einheiten dieselben Eigenschaften. Soll aber die Identifikation von $\mathbf{i}_1$ bzw. $\mathbf{i}_2$ mit 1 bzw. i einen Sinn haben, so müssen auch die multiplikativen Verknüpfungen zweier periodischer Erscheinungen mit den Multiplikationsgesetzen des Zahlensystems korrespondieren.

Sehen wir zu, ob dies in der Tat der Fall ist. Es seien zwei einfach harmonische Erscheinungen derselben Frequenz gegeben, etwa eine Spannung a und eine Stromstärke b (Fig. 21). Bilden wir zu jeder Zeit das Pro-

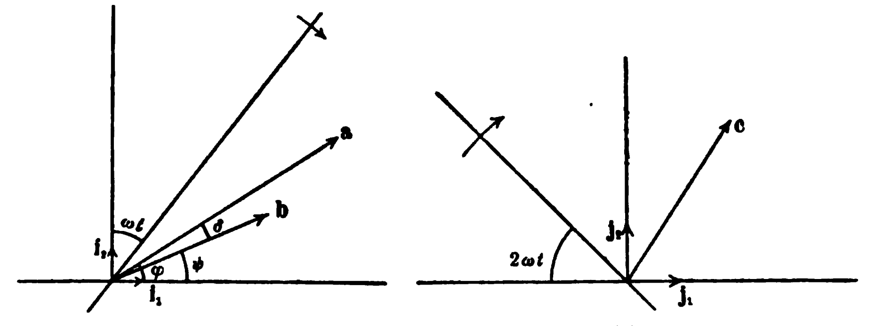


Fig. 21
Zwei sinusförmige Schwingungen **a** und **b**.

Fig. 22.
Darstellung einer sinusförmigen Schwingung doppelter Frequenz durch einen Vektor im j-Diagramm.

dukt ab, das in diesem Falle die momentane Leistung darstellt:

$$(625)\qquad A = ab = a_0 b_0 \sin(\omega t + \varphi)\sin(\omega t + \psi).$$

δ ist der Phasenverschiebungswinkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Nach bekannten geometrischen Formeln ist nun

$$(626)\qquad A = \tfrac{1}{2} a_0 b_0 \cos\delta - \tfrac{1}{2} a_0 b_0 \cos(2\omega t + \omega + \psi).$$

Die Leistung besteht also aus zwei Teilen, der eine Teil ist von der Zeit unabhängig, der zweite pulsiert mit der doppelten Frequenz 2ω, und könnte in einem zweiten Diagramm, mit einer doppelt so schnell drehenden Zeitlinie durch einen Vektor

$$(627)\qquad \mathbf{c} = -\beta\tfrac{1}{2} a_0 b_0 \{\cos(\varphi + \psi)\mathbf{j}_1 + \sin(\varphi + \psi)\mathbf{j}_2\}$$

dargestellt werden, wobei der Winkel $2\omega t$ von der Schlußlinie des zweiten Quadranten aus zu rechnen wäre (Fig. 22).

Jetzt untersuchen wir die multiplikativen Verknüpfungen von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, wenn $\mathbf{i}_1 = 1$ und $\mathbf{i}_2 = i$ gesetzt wird. Es ist dann:

$$(628)\begin{cases} \mathbf{ab} = \frac{1}{2} a_0 b_0 (\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{i}_2)(\cos\psi\,\mathbf{i}_1 + \sin\psi\,\mathbf{i}_2) \\ = \frac{1}{2} a_0 b_0 \{(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi)\mathbf{i}_1 + (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\mathbf{i}_2\} \\ = \frac{1}{2} a_0 b_0 \{\cos(\varphi+\psi)\,\mathbf{i}_1 + \sin(\varphi+\psi)\,\mathbf{i}_2\}, \end{cases}$$

und dies ist ein Vektor im Diagramm Fig. 21, der eine mit einfacher Frequenz pulsierende Größe darstellt. Die Multiplikation ergibt also nicht das gewünschte Resultat. Überdies erhielten wir offenbar noch einen ganz anderen Vektor, wenn die Achsen, die doch für die Erscheinung unwesentlich sind, anders gewählt wären, was daher rührt, daß die Multiplikation von 1 und i bei Drehungen des Bezugssystems nicht invariant ist.

Man kann nun dieser Multiplikation doch noch eine bestimmte Deutung beilegen, indem man festsetzt, daß im Resultat statt $\mathbf{i}_1$ bzw. $\mathbf{i}_2$ gelesen wird $\mathbf{j}_1$ und $\mathbf{j}_2$, und der Maßstab um einen Faktor $\sqrt{2}$ verkleinert wird. In der Tat stellt dann $-\mathbf{ab}$ den Vektor im Diagramm Fig. 22 dar, der mit dem Teil des Produkts, der die doppelte Frequenz hat, korrespondiert. Abgesehen noch von dem Umstand, daß man sich dabei dann doch eigentlich von den Rechnungsregeln von 1 und i entfernt, da solange das Resultat eine Zahl in 1 und i, d. h. $\mathbf{i}_1$ und $\mathbf{i}_2$ bleibt, dasselbe doch immer einen Vektor im Diagramm Fig. 21 darstellt, und nicht im Diagramm Fig. 22, ist dem Teil des Produkts, der in der Zeit konstant ist, in dieser Weise überhaupt nicht beizukommen. Die Multiplikationsregeln von 1 und i sind den multiplikativen Verknüpfungen der betrachteten periodischen wechselnden Größen also durchaus unangemessen. Es ergibt sich demnach, daß für die Identifikation von $\mathbf{i}_1$ bzw. $\mathbf{i}_2$ mit 1 bzw. i kein einziger Grund vorhanden ist, und wir besser einfach die Symbole $\mathbf{i}_1$ und $\mathbf{i}_2$ beibehalten und untersuchen, welche Multiplikationsregeln wohl mit den multiplikativen Verknüpfungen der periodischen Erscheinungen Übereinstimmung zeigen.

Da $\mathbf{i}_1$ und $\mathbf{i}_2$ Vektoren sind, müssen alle bei Drehungen invarianten Multiplikationen sich nach den Erörterungen in Kap. II ableiten lassen aus $\cdot$, $\times$ und X, und es liegt also nahe, diese Grundmultiplikationen selbst zuerst zu prüfen. Die negative skalare Multiplikation ergibt:

$$(629) \qquad -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \tfrac{1}{2} a_0 b_0 \cos\delta$$

und wir haben hier in der Tat schon gleich den von der Zeit unabhängigen Teil des gesuchten Produkts, der, da er Drehungen gegenüber invariant ist, notwendig als skalare Größe erscheint.

Die vektorische Multiplikation von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ergibt einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene des Diagramms steht, also keine Komponente in dieser Ebene aufweist. Betrachten wir nur denjenigen Teil des Produkts, der

in dieser Ebene liegt, was etwa angegeben werden kann durch das Funktionszeichen E oder den Index $_e$, so entsteht die Gleichung:

$$\text{(630)} \qquad \mathbf{E}\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \underset{e}{\times} \mathfrak{b} = 0.$$

Die deviatorische Multiplikation ergibt eine Größe in $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ und $\mathbf{I}_3$. Von diesen fallen $\mathbf{L}_3$, $\mathbf{I}_1$ und $\mathbf{I}_2$ außerhalb der Ebene des Diagramms. Der Teil des deviatorischen Produktes

$$\text{(631)} \qquad \mathfrak{a} \,X\, \mathfrak{b} = \tfrac{1}{2} a_0 b_0 \{ \alpha \cos\varphi \cos\psi \mathbf{L}_1 + \alpha \sin\varphi \sin\psi \mathbf{L}_2 + \beta(\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\mathbf{I}_3 \}$$

$$= \tfrac{1}{2} a_0 b_0 \left\{ \cos(\varphi - \psi)\,\alpha \frac{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2}{2} + \cos(\varphi + \psi)\,\alpha \frac{\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2}{2} + \sin(\varphi + \psi)\beta \mathbf{I}_3 \right\},$$

der in der Ebene liegt, ist also:

$$\text{(632)} \quad \begin{cases} \mathbf{E}\,\mathfrak{a} \,X\, \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \underset{e}{X} \mathfrak{b} \\ \qquad = \tfrac{1}{2} a_0 b_0 \left\{ -\cos(\varphi + \psi)\,\alpha \frac{\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1}{2} + \sin(\varphi + \psi)\beta \mathbf{I}_3 \right\}, \end{cases}$$

demnach gleich dem E-Teil des deviatorischen Produktes eines Vektors $\mathfrak{c}$ mit sich selbst, wenn $\mathfrak{c}$ den Winkel zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ halbiert und einen Absolutwert gleich $\sqrt{a_m b_m}$ besitzt (Fig. 23).

Jeder Deviator der Ebene kann also für den Zweck dieser Unter-

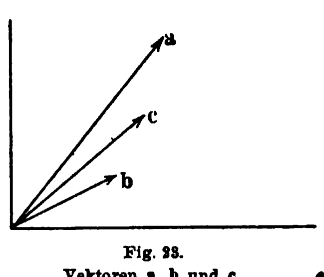


Fig. 23.
Vektoren a, b und c.

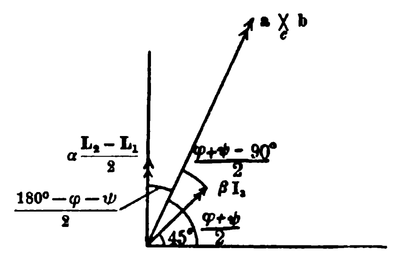


Fig. 24. Der Deviator $\mathfrak{a} \underset{e}{X} \mathfrak{b}$ und die Einheitsdeviatoren $\beta\mathbf{I}$ und $\alpha \frac{\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1}{2}$.

suchung einfach dargestellt werden, indem man den zugehörigen Vektor, etwa mit einem Doppelpfeil versehen, angibt. Gibt man auch die 45° auseinanderliegenden Einheitsdeviatoren $\alpha \frac{\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1}{2}$ und $\beta \mathbf{I}_3$ in dieser Weise an, wie es in Fig. 24 geschehen ist, und schreibt man (632) in der Form:

$$\text{(633)} \quad \mathfrak{a} \underset{e}{X} \mathfrak{b} = a_m b_m \left\{ \cos(\varphi + \psi - 90^0)\beta \mathbf{I}_3 + \cos(180^0 - \varphi - \psi)\,\alpha \frac{\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1}{2} \right\},$$

so ergibt sich, daß ein Deviator in der Ebene sich nach zwei 45° auseinanderliegenden Richtungen nach derselben Formel zerlegen läßt wie ein Vektor nach zwei senkrechten Richtungen, wobei in der Formel der doppelte

Winkel statt des einfachen Winkels zu setzen ist.[1]) In dem Sinne läßt sich also von der Komponente eines Deviators in einer Ebene nach einer bestimmten Richtung reden. Wenden wir uns jetzt wieder zu dem E-Teil des deviatorischen Produktes von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$:

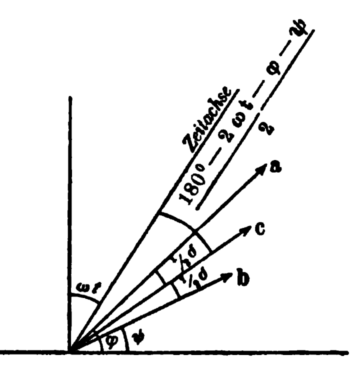


Fig. 25. Der Teil doppelter Frequenz des Produktes zweier Sinusschwingungen gleicher Frequenz, dargestellt durch den Deviator $\mathfrak{c} \underset{e}{\times} \mathfrak{c}$.

$$(634)\qquad \mathfrak{a} \underset{e}{\times} \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \underset{e}{\times} \mathfrak{c},$$

so folgt aus Fig. 25 infolge der obigen Bemerkung unmittelbar, daß die Komponente in Richtung der Zeitachse gleich:

$$-\tfrac{1}{2} a_0 b_0 \cos(2\omega t + \varphi + \psi)\alpha \mathfrak{L}_z$$

ist, wo

$$\alpha \mathfrak{L}_z = \mathfrak{i}_z \underset{e}{\times} \mathfrak{i}_z$$

ist. Der Zahlenkoeffizient des Einheitsdeviators in Richtung der Zeitachse $-\mathfrak{L}_z$ stellt also genau den negativen zweiten Teil des Produktes von a und b mit dem Faktor α dar. Das totale Produkt der beiden einfach harmonischen periodischen Erscheinungen a und b wird also dargestellt durch:

$$(635)\qquad \frac{1}{\alpha}\mathrm{E}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \frac{1}{\alpha}\mathfrak{a} \underset{e}{\llcorner} \mathfrak{b} = \frac{1}{\alpha}\mathfrak{a} \underset{e}{\perp} \mathfrak{b},$$

wo der Skalar dem konstanten Teil entspricht, das Fehlen eines Vektorteils übereinstimmt mit dem Fehlen einer periodischen Erscheinung von der Grundfrequenz im Produkt, und der Deviatorteil, genau in derselben Weise wie ein Vektor, durch seine Komponente in Richtung der Zeitachse den Teil mit der doppelten Frequenz angibt.

Sind drei einfach harmonische Erscheinungen a, b und c vorhanden:

$$(636)\qquad \begin{cases} a = a_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ b = b_0 \sin(\omega t + \varphi - \delta_1) \\ c = c_0 \sin(\omega t + \varphi - \delta_2), \end{cases}$$

so ist das Produkt, wie leicht abzuleiten:

$$(637)\qquad \begin{cases} \varphi = \tfrac{1}{4} a_0 b_0 c_0 \{\cos\delta_1 \sin(\omega t + \varphi - \delta_2) + \cos\delta_2 \sin(\omega t + \varphi - \delta_1) \\ \quad + \cos(\delta_1 - \delta_2)\sin(\omega t + \varphi) + \sin(3\omega t + 3\varphi - \delta_1 - \delta_2)\}. \end{cases}$$

Dasselbe zerfällt in einen Teil mit der normalen Frequenz und einen mit der dritten Harmonischen dieser Frequenz.

---

1) Da $\mathfrak{I}_1 \cdot \mathfrak{I}_1 = 1$, $\alpha\beta(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1) \cdot \alpha\beta(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1) = 1$ und $\mathfrak{I}_1 \cdot \alpha\beta(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1) = 0$ läßt sich die Größe der Komponenten genau so durch skalare Produktbildung bestimmen wie bei Vektoren. Man vergleiche die S. 9 erwähnten Beziehungen zwischen geometrischen Größen höherer Ordnung und Kugelfunktionen.

Der korrespondierende Vektor des ersten Teils ist:

$$-\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}.$$

Hiervon entsteht $-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ aus dem skalaren Produkte von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ mit dem Vektor $\mathbf{c}$, der übrig bleibende Rest:

$$+\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$$

ist, wie sich leicht nachrechnen läßt, invariant bei denjenigen Änderungen des Winkels zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, bei welchen die Winkelhalbierende dieselbe bleibt. Dieser Teil kann also aufgefaßt werden als ein Produkt von:

$$-\frac{1}{\alpha}\,\mathbf{a}\underset{e}{\times}\mathbf{b}$$

mit dem Vektor $\mathbf{c}$. Die Multiplikation ist der Art nach eine deviatorische, da sie einen Vektor erzeugt, sie ist aber nach (177) nicht gleich $\times$, und wir können sie, da sie sich ebenfalls auf die Ebene bezieht, darstellen durch $\frac{1}{\alpha}\underset{e}{\times}$. Der Teil der Grundfrequenz des Produktes dreier einfach harmonischer Erscheinungen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ wird dann dargestellt durch:

$$\mathbf{d}=-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-3(\mathbf{a}\underset{e}{\times}\mathbf{b})\underset{e}{\times}\mathbf{c} \tag{638}$$

oder:

$$\mathbf{d}=-3(\mathbf{a}\underset{e}{\llcorner}\mathbf{b})\underset{e}{\llcorner\!\times}\mathbf{c}=\text{cycl.} \tag{639}$$

Der zweite Teil, der die Frequenz der dritten Harmonischen hat, läßt sich in derselben Weise durch einen Septor in der Ebene des Diagramms darstellen, wie die anderen Teile durch einen Vektor bzw. Deviator. Dieser Septor entsteht durch eine septorische Multiplikation aus $-\frac{1}{\alpha}(\mathbf{a}\underset{e}{\times}\mathbf{b})$ und $\mathbf{c}$ und kann stets als das Produkt dreier gleicher Vektoren dargestellt werden (Fig. 26, vgl. Fig. 24).

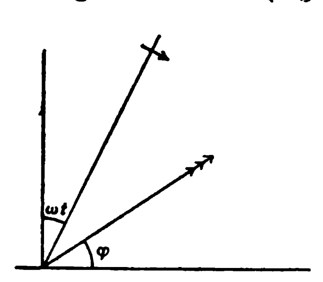


Fig. 26. Darstellung einer Schwingung dreifacher Frequenz durch eine Größe dritter Ordnung.

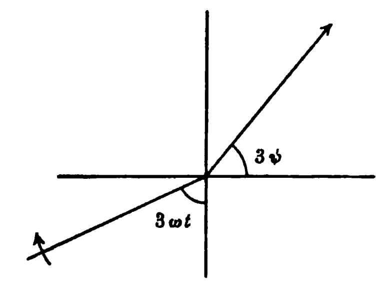


Fig. 27. Darstellung einer Größe dritter Ordnung durch einen Vektor in einem Diagramm mit dreimal schneller rotierender Zeitlinie.

Von dieser Darstellung kann man sofort übergehen zu einem Diagramm mit dreimal schneller rotierender Zeitlinie, wenn man nur die Winkel φ bzw. ωt dreimal vergrößert, und den letzten Winkel von der Schlußlinie des dritten Quadranten an rechnet (Fig. 27, vgl. Fig. 22).

Auf diese Darstellungen der höheren Harmonischen soll hier jetzt nicht weiter eingegangen werden, da der Hauptzweck war zu zeigen, wie die Verwendung der Vektoren $\mathbf{i}_1$ und $\mathbf{i}_2$ mit den Grundmultiplikationen der verschiedenen Ordnungen nicht nur die bei 1 und i fehlende Übereinstimmung zwischen den Multiplikationen der Analysis und den tatsächlich vorhandenen multiplikativen Verknüpfungen herbeiführt, sondern auch die Möglichkeit eröffnet, mit den nicht einfach harmonischen periodischen Erscheinungen unter Hinzuziehung höherer komplexer Zahlensysteme genau so zu rechnen, wie es zurzeit mit den einfach Harmonischen mittels eines komplexen Systems in zwei Einheiten geschieht. Für die wirkliche Rechnung müssen allerdings zunächst die Rechnungsregeln dieser höheren Systeme abgeleitet werden, obwohl es ja auch möglich wäre, gerade an Hand der einfachen Beziehungen in der Ebene den Teil der Regeln zu bestimmen, der für diesen Zweck nötig ist.

Der Richtungswiderstand. Die praktische Möglichkeit einer solchen Rechnung ist nun im hohen Maße abhängig von dem Verhalten der Drehoperatoren. Bekanntlich spielen diese in den Vektordiagrammen eine große Rolle. Ist r ein Widerstand in Ohm und l eine Selbstinduktion in Henry, so wird ein Strom $\mathbf{j}$ in Ampere an den Klemmen des Widerstandes eine Spannung $\mathbf{e}_r = \mathbf{j}r$ erfordern und an den Klemmen der Selbstinduktion eine Spannung $\mathbf{e}_l$, deren effektive Größe gleich $j_m \omega l$ ist (wo $\omega = 2\pi$ mal Frequenz), deren Richtung im Diagramm aber der von $\mathbf{j}$ um 90^0 vorauseilt (Fig. 28).

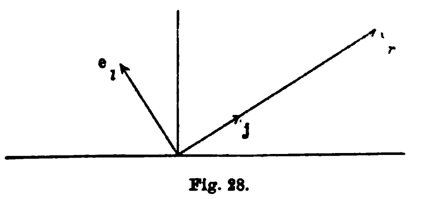


Fig. 28.

In dem üblichen Diagramm mit 1 und i ordnet man der Selbstinduktion daher die imaginäre Einheit i zu und bekommt so die Gleichungen:

$$\mathbf{e}_r = r\mathbf{j}$$
$$\mathbf{e}_l = i\omega l\mathbf{j}, \tag{640}$$

die in der Tat zweckentsprechend sind. Nur tritt dabei aber, neben den schon oben erwähnten Schwierigkeiten, die sonderbare Erscheinung auf, daß die Selbstinduktion als Richtungsgröße in der Ebene erscheint, also mit der Richtung irgendeiner pulsierenden Größe, und zwar von ganz bestimmter Phase zusammenfällt, eine Tatsache, der man gar keinen verständigen Sinn beilegen kann. Dabei bewegt sich dann diese Richtungsgröße natürlich auch der drehenden Zeitlinie gegenüber und ist also keine mit der Zeit invariante Größe, ein Umstand, dem man auch keine Deu-

tung zu geben vermag, und über den man, bei dem praktischen Gebrauch des Diagramms vollständig hinwegsehen muß.

Kommen wir nun aber von der Identifikation von $\mathbf{i}_1$ und $\mathbf{i}_2$ mit 1 bzw. i zurück, so ergibt sich eine nach jeder Seite hin befriedigende Lösung, indem man der Selbstinduktion den Vektor

$$\mathbf{l} = \omega l \mathbf{i}_3 \tag{641}$$

zuordnet, der senkrecht auf der Ebene steht. Denn es ist in dem Falle:

$$\begin{cases} \mathfrak{e}_r = r\mathbf{j} \\ \mathfrak{e}_l = \mathbf{l} \times \mathbf{j}, \end{cases} \tag{642}$$

die Selbstinduktion fällt nicht mehr mit irgendeiner Phase einer pulsierenden Größe zusammen und ist auch im Diagramm der Zeit gegenüber invariant.

Überdies vertritt der Vektor $\mathbf{l}$ nicht nur die Selbstinduktion für einen rein sinusförmigen Wechselstrom, sondern es ist allgemein, wenn Φ die geometrische Größe ist, die einen Strom beliebiger Kurvenform vertritt, und $\mathfrak{P}_r$ bzw. $\mathfrak{P}_l$ die zugehörigen Spannungen sind:

$$\begin{cases} \mathfrak{P}_r = r\Phi \\ \mathfrak{P}_l = \mathbf{l} \times \Phi. \end{cases} \tag{643}$$

Denn die Größe zweiter Ordnung $\mathbf{I}_3$ erfährt z. B. infolge der Multiplikation mit $\mathbf{l}$:

$$\mathbf{l} \times \mathbf{I}_3 = l_m \frac{\alpha}{\beta}(\mathbf{L}_3 - \mathbf{L}_2) = 2 l_m \alpha\beta(\mathbf{L}_3 - \mathbf{L}_2) \tag{644}$$

eine Drehung um 45° nach vorwärts, während ihre absolute Größe mit $2\omega l$ multipliziert wird. Dies ist aber gerade die Wirkung der Selbstinduktion bei einem Strom von doppelter Frequenz, sodaß hier in der Tat zwischen Rechnung und physikalischer Tatsache eine vollkommene Übereinstimmung herrscht.

Verzerrung der Kurvenform und Überlagerung fremder Perioden. Bei oszillographischer Betrachtung von Wechselstromerscheinungen, deren Kurvenform sich während des Vorganges fortwährend verändert, wie das z. B. bei dem Ankerstrom asynchroner Motoren vorkommen kann, kann sich die Frage erheben, was dann bei solchen Veränderungen eigentlich mit dem Vektor des Diagramms passiert. Wird das Diagramm vollständig unnütz sobald die Kurvenform von der sinusförmigen abweicht, ist also eine Diskontinuität vorhanden, oder geht der Vektor in etwas anderes über? Die Beantwortung ist nach obigem leicht.

Eine Kurve beliebiger Form korrespondiert mit einer ganz bestimmten zusammengesetzten geometrischen Größe in der Ebene, im Spezialfall der Sinusform reduziert sich diese Größe zu einem Vektor, und bei Änderung der Kurvenform treten auch Teile von anderer als erster Ordnung auf.

Bekanntlich stellt sich bei jeder Änderung eines stationären Wechselstromzustandes eine Übergangsperiode ein, in der neben der Erscheinung der Grundfrequenz eine Nebenerscheinung auftritt, deren Frequenz abhängig ist von den Konstanten des Stromkreises, und die sich über die erste Erscheinung lagert. Tritt ein solcher Fall auf, so geht der Vektor des Diagramms vorübergehend über in eine geometrische Größe, die nicht einfach als Summe von Skalar, Vektor, Deviator usw. aufzufassen ist, da die fremde Frequenz im allgemeinen keine höhere Harmonische der Grundfrequenz ist. Geometrische Größen dieser komplizierteren Art wurden bis jetzt unseres Wissens noch nicht behandelt.

Anhang.

Die Hauptformeln der Affinoranalysis sollen in diesem Anhang zum Zwecke der Orientierung zusammengestellt werden.

In der Affinoranalysis gesellen sich zu den Skalaren und Vektoren und der skalaren und vektorischen Multiplikation $\cdot$ bzw. $\times$ der Vektoranalysis eine neue Art von Größen, die Deviatoren, und eine neue Multiplikation, die deviatorische X. Skalare werden wie gewöhnliche Zahlen behandelt und bezeichnet mit nicht fetten lateinischen oder griechischen Buchstaben; Vektoren, bezeichnet mit kleinen fetten lateinischen Buchstaben, drücken sich aus in den Einheiten:

$$\mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_2,\ \mathbf{i}_3,$$

und Deviatoren, bezeichnet mit fetten Buchstaben des großen lateinischen Alphabets, in den Einheiten:

$$\mathbf{L}_1,\ \mathbf{L}_2,\ \mathbf{L}_3,\ \mathbf{I}_1,\ \mathbf{I}_2,\ \mathbf{I}_3.$$

Tensoren (Skalar + Vektor) und Affinoren (Skalar + Vektor + Deviator), die allgemeinsten Größen des Systems, werden wie Deviatoren bezeichnet.

Die Produkte der zehn Einheiten in den drei Grundmultiplikationen sind die folgenden:

$$\left.\begin{array}{lll}
\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -1^{1)} & \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_1 \,\mathsf{X}\, \mathbf{i}_1 = \alpha \mathbf{L}_1 \\
 & & \mathbf{i}_2 \,\mathsf{X}\, \mathbf{i}_3 = \beta \mathbf{I}_1 \\
\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_1 = +1 & \mathbf{i}_1 \times \mathbf{I}_1 = 2\alpha\beta(\mathbf{L}_3 - \mathbf{L}_2) = -\mathbf{I}_1 \times \mathbf{i}_1 & \\
 & & \mathbf{I}_1 \,\mathsf{X}\, \mathbf{I}_1 = -\alpha \mathbf{L}_1 \\
\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_1 = +2 & \mathbf{i}_2 \times \mathbf{I}_3 = -\mathbf{J}_1 = -\mathbf{I}_3 \times \mathbf{i}_2 & \mathbf{I}_2 \,\mathsf{X}\, \mathbf{I}_3 = \beta \mathbf{I}_1 \\
\mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{L}_3 = -1 & \mathbf{i}_3 \times \mathbf{I}_2 = \mathbf{J}_1 = -\mathbf{I}_2 \times \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_2 \,\mathsf{X}\, \mathbf{I}_3 = -\beta \mathbf{i}_1 \\
 & & \mathbf{i}_3 \,\mathsf{X}\, \mathbf{I}_2 = -\beta \mathbf{i}_1
\end{array}\right\} \text{Cycl.}$$

1) Das —-Zeichen ist in der zurzeit üblichen Vektoranalysis nicht gebräuchlich, das +-Zeichen ist aber für die Affinoranalysis unbrauchbar. (Vgl. S. 47 u. f.) Die skalare Multiplikation ist mit der zwischen gewöhnlichen Zahlen und beliebigen Größen identisch. (Vgl. S. 41.)

$$
\left.\begin{array}{lll}
1\cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 \times \mathbf{L}_3 = 6\alpha\beta\mathbf{J}_2 = -\mathbf{L}_3 \times \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_1 \mathbin{X} \mathbf{L}_1 = -2\alpha\mathbf{i}_1 \\
1\cdot \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1 & \mathbf{i}_3 \times \mathbf{L}_2 = -6\alpha\beta\mathbf{J}_3 = -\mathbf{L}_2 \times \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_2 \mathbin{X} \mathbf{L}_3 = \alpha\mathbf{i}_2 \\
1\cdot \mathbf{I}_1 & & \mathbf{i}_3 \mathbin{X} \mathbf{L}_2 = \alpha\mathbf{i}_3 \\
1\cdot 1 = 1 & \mathbf{I}_2 \times \mathbf{L}_3 = 6\alpha\beta\mathbf{i}_2 = -\mathbf{L}_3 \times \mathbf{I}_2 & \\
 & \mathbf{I}_3 \times \mathbf{L}_2 = -6\alpha\beta\mathbf{i}_3 = -\mathbf{L}_2 \times \mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_1 \mathbin{X} \mathbf{L}_1 = -2\alpha\mathbf{I}_1 \\
\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} & & \mathbf{I}_2 \mathbin{X} \mathbf{L}_3 = \alpha\mathbf{I}_2 \\
 & \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2 = \mathbf{i}_3 = -\mathbf{I}_2 \times \mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_3 \mathbin{X} \mathbf{L}_2 = \alpha\mathbf{I}_3 \\
\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\
 & & \mathbf{L}_1 \mathbin{X} \mathbf{L}_1 = 2\alpha\mathbf{L}_1 \\
 & & \mathbf{L}_2 \mathbin{X} \mathbf{L}_3 = -\alpha\mathbf{L}_1
\end{array}\right\} \text{Cycl.}
$$

Die Multiplikationen $\cdot$ und $\mathbin{X}$ sind kommutativ. Nicht angegebene Produkte sind null. Beim praktischen Gebrauch des Systems werden diese Formeln nur verwendet, wenn man auf irgendein Koordinatensystem Bezug nehmen will, die Rechnung selbst erfolgt sonst ganz vermittels der weiter unten angegebenen von jedem Bezugssystem freien Multiplikationsregeln. Die Zurückführung auf ein Koordinatensystem erfolgt vermittels der Formeln:

$$
\begin{aligned}
\text{Vektor:}\quad & \mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3. \\
\text{Affinor:}\quad & \mathbf{A} = \alpha A_s + \beta A_{v1}\mathbf{i}_1 + \beta A_{v2}\mathbf{i}_2 + \beta A_{v3}\mathbf{i}_3 \\
& \quad + \alpha A_{d1}\mathbf{L}_1 + \alpha A_{d2}\mathbf{L}_2 + \alpha A_{d3}\mathbf{L}_3 \\
& \quad + \beta A_{d4}\mathbf{I}_1 + \beta A_{d5}\mathbf{I}_2 + \beta A_{d6}\mathbf{I}_3.
\end{aligned}
$$

Von einem Affinor $\mathbf{A}$ leiten sich vermittels der Funktionssymbole S bzw. $_s$, V bzw. $_v$, D bzw. $_d$, T bzw. $_t$, K bzw. $_k$, C bzw. $_c$, Ɔ bzw. $_ɔ$, die folgenden Größen ab:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Skalar:} & \mathrm{S}\mathbf{A} = A_s, \\
\text{Vektor:} & \mathrm{V}\mathbf{A} = \mathbf{A}_v = A_{v1}\mathbf{i}_1 + A_{v2}\mathbf{i}_2 + A_{v3}\mathbf{i}_3, \\
\text{Deviator:} & \mathrm{D}\mathbf{A} = \mathbf{A}_d = \alpha A_{d1}\mathbf{L}_1 + \alpha A_{d2}\mathbf{L}_2 + \alpha A_{d3}\mathbf{L}_3 \\
 & \qquad + \beta A_{d4}\mathbf{J}_1 + \beta A_{d5}\mathbf{J}_2 + \beta A_{d6}\mathbf{J}_3, \\
 & \mathbf{A} = \alpha A_s + \beta\mathbf{A}_v + \mathbf{A}_d, \\
\text{Tensor:} & \mathrm{T}\mathbf{A} = \mathbf{A}_t = \alpha A_s + \mathbf{A}_d = \mathbf{A} - \beta\mathbf{A}_v, \\
\text{Konjugierter Affinor:} & \mathrm{K}\mathbf{A} = \mathbf{A}_k = \mathbf{A} - 2\beta\mathbf{A}_v, \\
\text{Oberer Affinor:} & \mathrm{C}\mathbf{A} = \mathbf{A}_c = 2\alpha A_s - \beta\mathbf{A}_v - \mathbf{A}_d = 3\alpha A_s - \mathbf{A}, \\
\text{Unterer Affinor:} & \mathrm{Ɔ}\mathbf{A} = \mathbf{A}_ɔ = \tfrac{1}{2}\alpha A_s - \beta\mathbf{A}_v - \mathbf{A}_d = \tfrac{3}{2}\alpha A_s - \mathbf{A}.
\end{array}
$$

Neben den Grundmultiplikationen werden zwei „totale Multiplikationen“ verwendet:

$$\text{erste totale Multiplikation:}\quad \neg = 2\alpha \cdot + \beta \times - \mathsf{X},$$
$$\text{zweite „ „}\quad \llcorner = \alpha \cdot + \beta \times + \mathsf{X},$$

und ihre Umkehrungen $\ulcorner$ und $\lrcorner$. Diese Multiplikationen sind offenbar nicht kommutativ, da sie $\times$ enthalten.

Um das Auftreten der Ordnungskonstanten α und β in den Formeln soviel wie möglich zu beschränken, verwenden wir $\neg$, $\llcorner$ und Umkehrungen nur zwischen Vektoren, dagegen $\beta \neg$, $\beta \llcorner$, zwischen Vektoren und Affinoren, und $\beta^2 \neg$, $\beta^2 \llcorner$, zwischen Affinoren. Deviatoren und Tensoren werden als unvollständige Affinoren betrachtet. Da die verschiedenen Größenarten durch die Schriftart hinreichend gekennzeichnet sind, verwenden wir nun für die drei verschiedenen Sätze von Multiplikationen dieselben Zeichen $\rceil$, $\lfloor$, $\lceil$, $\rfloor$, es ist also:

$\rceil, \lfloor = \neg, \llcorner$ zwischen Vektoren,

$\rceil, \lfloor = \beta \neg, \beta \llcorner$ zwischen einem Vektor und einem Affinor,

$\rceil, \lfloor = \beta^2 \neg, \beta^2 \llcorner$ zwischen Affinoren.

$\rceil$ und $\lfloor$ heißen die Hauptmultiplikationen, $\rceil$ die affinorische, $\lfloor$ die dyadische.

Aus den Hauptmultiplikationen leiten sich vermittels der Funktionszeichen S, V, D, T, K, C, O die abgeleiteteten Multiplikationen ab, z. B.:

Skalardyadische Multiplikation: $\mathbf{A} \lfloor\!\cdot\!\rfloor \mathbf{B} = \mathrm{S}\,\mathbf{A} \lfloor \mathbf{B}$ (kommutativ),

Vektordyadische „ $\mathbf{A} \lfloor^{\times} \mathbf{B} = \mathrm{V}\,\mathbf{A} \lfloor \mathbf{B}$,

Überdyadische „ $\mathbf{A} \lfloor_{c} \mathbf{B} = \mathrm{C}\,\mathbf{A} \lfloor \mathbf{B}$.

(Vgl. S. 95.) Die tensoraffinorische und die tensordyadische oder kurz tensorische Multiplikation werden angegeben durch die symmetrischen Zeichen $\top$ und $\perp$.

Von dem Umstande, daß Skalare, Vektoren und Affinoren durch die Schriftart hinreichend gekennzeichnet sind, können wir nun noch einen weiteren Gebrauch machen, indem wir bei jeder der neun möglichen Kombinationen eines der Multiplikationszeichen unterdrücken. Dazu wählen wir:

zwischen einem Skalar und einer beliebigen Größe $\cdot$,
„ Vektoren $\lfloor$,
„ einem Skalar und einem Affinor $\lfloor^{\times}$,
„ Affinoren $\rceil$.

Wir behalten natürlich das Recht, das unterdrückte Zeichen stets wieder einzusetzen.

Die wichtigsten Produkte zweier Vektoren sind:

(155) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}S\mathbf{a}\urcorner\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}S\mathbf{a}\ulcorner\mathbf{b} = S\mathbf{a}\mathbf{b} = S\mathbf{a}\lrcorner\mathbf{b}$ skal. Prod. (kommut.).

(156) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = V\mathbf{a}\urcorner\mathbf{b} = -V\mathbf{a}\ulcorner\mathbf{b} = V\mathbf{a}\mathbf{b} = -V\mathbf{a}\lrcorner\mathbf{b}$
vektorisches Produkt (antikomm.).

(157) $\mathbf{a}\overset{*}{\times}\mathbf{b} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ quaternionisches Produkt (assoz.).

(158) $\mathbf{a}\mathbin{X}\mathbf{b} = -D\mathbf{a}\urcorner\mathbf{b} = -D\mathbf{a}\ulcorner\mathbf{b} = D\mathbf{a}\mathbf{b} = D\mathbf{a}\lrcorner\mathbf{b}$
deviatorisches Produkt (kommut).

(159a) $\mathbf{a}\urcorner\mathbf{b} = 2\alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}\times\mathbf{b} - \mathbf{a}\mathbin{X}\mathbf{b}$ affinor. Prod. (assoz.).

(160) $\mathbf{a}\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbin{X}\mathbf{b}$ dyadisches Prod.

(161b) $\mathbf{a}\lrcorner\mathbf{b} = -\mathbf{a}\urcorner\mathbf{b} + 3\alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

(162) $\mathbf{a}\perp\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b}+\mathbf{b}\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}\mathbin{X}\mathbf{b}$
tensor. Prod. (kommut.).

Die wichtigsten Rechnungsregeln für die Produkte von drei Vektoren sind:

(167) $\begin{cases}(\mathbf{a}\mathbf{b})\urcorner\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\\ \mathbf{a}\urcorner(\mathbf{b}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}\end{cases}$

(172) $\begin{cases}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\end{cases}$

(173b, 176) $\begin{cases}(\mathbf{a}\urcorner\mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a}\mathbf{b})\,\overline{\times\urcorner}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \tfrac{2}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\\ \qquad + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} - \mathbf{a}\mathbin{X}(\mathbf{b}\mathbin{X}\mathbf{c})\\ \mathbf{a}(\mathbf{b}\urcorner\mathbf{c}) = \mathbf{a}\,\overline{\times\urcorner}\,(\mathbf{b}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \tfrac{2}{3}\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\\ \qquad + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\mathbin{X}\mathbf{b})\mathbin{X}\mathbf{c}\end{cases}$

(173c, 174) $\begin{cases}(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} + (\mathbf{a}\mathbin{X}\mathbf{b})\mathbin{X}\mathbf{c}\\ \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{a}\mathbin{X}(\mathbf{b}\mathbin{X}\mathbf{c})\end{cases}$

(175) $\begin{cases}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\\ \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{a}\times\mathbf{c})\times\mathbf{b}\end{cases}$

(177) $\begin{cases}(\mathbf{a}\mathbin{X}\mathbf{b})\mathbin{X}\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) + \tfrac{1}{2}\mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) - \tfrac{1}{3}\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\\ \mathbf{a}\mathbin{X}(\mathbf{b}\mathbin{X}\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} - \tfrac{1}{3}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}\end{cases}$

(180) $\begin{cases}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} + (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a} + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b} = 0\\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = 0\end{cases}$

(181) $\begin{cases}(\mathbf{a}\mathbin{X}\mathbf{b})\mathbin{X}\mathbf{c} + (\mathbf{b}\mathbin{X}\mathbf{c})\mathbin{X}\mathbf{a} + (\mathbf{c}\mathbin{X}\mathbf{a})\mathbin{X}\mathbf{b} \neq 0\\ \mathbf{a}\mathbin{X}(\mathbf{b}\mathbin{X}\mathbf{c}) + \mathbf{c}\mathbin{X}(\mathbf{a}\mathbin{X}\mathbf{b}) + \mathbf{b}\mathbin{X}(\mathbf{c}\mathbin{X}\mathbf{a}) \neq 0\end{cases}$

$$(187)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{a} - (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{c}) + \tfrac{3}{2}\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{c}) &= \mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{b} \mathbin{\mathsf{X}} (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + \tfrac{3}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{c} \end{aligned}\right.$$

$$(189)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{c} &= -\tfrac{1}{3}(\mathbf{b} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{a}) \times \mathbf{b} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ \mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= -\tfrac{1}{3}\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) + \tfrac{1}{3}\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{a}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) \times \mathbf{c} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{c}. \end{aligned}\right.$$

Die wichtigsten Regeln für die Produkte von vier Vektoren sind:

$$(192)\qquad (\mathbf{a}\mathbf{b})(\mathbf{c}\mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a}\mathbf{d})$$

$$(193, 194, 195)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathbf{a}\mathbf{b}) \overline{|\cdot|} (\mathbf{c}\mathbf{d}) &= \tfrac{1}{3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \\ &\quad + (\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \end{aligned}\right.$$

$$(200)\qquad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}\} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\}$$

$$(197, 201)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{d}) &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - \tfrac{1}{3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) \\ &= \{(\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{c}\} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{b} \mathbin{\mathsf{X}} (\mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{d})\} \end{aligned}\right.$$

$$(202)\qquad (\mathbf{a}\mathbf{b}) \overline{\times|} (\mathbf{c}\mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d})$$

$$(204)\qquad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times \{\mathbf{a} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{c})\}$$

$$(205)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) \\ &\quad + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \end{aligned}\right.$$

$$(206)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \mathbf{a}\{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\} + \mathbf{b} \cdot \{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{c})\} \\ &= -\mathbf{c}\{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\} - \mathbf{d}\{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})\} \end{aligned}\right.$$

$$(209)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{d}) &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) + \tfrac{1}{3}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \end{aligned}\right.$$

$$(211)\qquad (\mathbf{a}\mathbf{b}) \overline{\mathsf{X}|} (\mathbf{c}\mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{d})$$

$$(212)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbin{\mathsf{X}} (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{d}) \\ &\quad + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{a}) \end{aligned}\right.$$

$$(213)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{d}) \\ &\quad + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{a}) \end{aligned}\right.$$

$$(214)\qquad (\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) \mathbin{\mathsf{X}} (\mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{d}) = \left\{\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{d}) \\ &-\tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{a}) \\ &+\tfrac{2}{3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{d}) + \tfrac{2}{3}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \mathbin{\mathsf{X}} \mathbf{b}). \end{aligned}\right.$$

Die wichtigsten Regeln für die Produkte von Affinoren mit Vektoren und unter sich sind:

(227) $$\mathbf{A}\mathbf{b} = \tfrac{1}{3}A_s \cdot \mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}_v \times \mathbf{b} + \mathbf{A}_d \times \mathbf{b}$$

(228) $$\mathbf{A} \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{b} = \tfrac{2}{3}A_s \cdot \mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}_v \times \mathbf{b} - \mathbf{A}_d \times \mathbf{b}$$

(229) $$\begin{cases} \mathbf{A} \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{b} = (\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{A})\mathbf{b} \\ \mathbf{A}\mathbf{b} = (\mathbf{K}\,Ↄ\,\mathbf{A}) \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{b} \end{cases}$$

(230) $$\begin{cases} (\mathbf{K}\mathbf{A})\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{A} \\ (\mathbf{K}\mathbf{A}) \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{b} = \mathbf{b} \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{A} \end{cases}$$

(233) $$\mathbf{A} \urcorner \mathbf{b} = -\mathbf{K}\mathbf{b} \urcorner \mathbf{A}_k$$

(234) $$\mathbf{a} \times \mathbf{B} = \mathbf{a} \urcorner \mathbf{B} - \mathbf{B} \urcorner \mathbf{a}$$

(235) $$\begin{cases} (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{c}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{c} \\ \mathbf{a}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{a}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{C} \end{cases}$$

(237) $$\begin{cases} (\mathbf{A}\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{b}\mathbf{c}) = \mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{c} \\ \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{C}) = (\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{C} = \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{C} \end{cases}$$

(239) $$\begin{cases} (\mathbf{A} \urcorner \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ \mathbf{a}(\mathbf{b} \urcorner \mathbf{C}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{C} \end{cases}$$

(241) $$\begin{cases} (\mathbf{a} \urcorner \mathbf{B})\mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{B}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{c}) \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{B}_k = -\mathbf{B} \,\overline{\times}\!\rceil\, (\mathbf{c}\mathbf{a}) \\ \mathbf{a}(\mathbf{B} \urcorner \mathbf{a}) = (\mathbf{a}\mathbf{B}) \times \mathbf{c} = \mathbf{B}_k \,\overline{\times}\!\rceil\, (\mathbf{a}\mathbf{c}) = -(\mathbf{c}\mathbf{a}) \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{B} \end{cases}$$

(242b) $$\mathbf{K}\mathbf{a} \urcorner \mathbf{B} \urcorner \mathbf{c} = \mathbf{c} \urcorner \mathbf{B}_k \urcorner \mathbf{a}$$

(243) $$\begin{cases} \mathbf{a} \urcorner \mathbf{b} \urcorner \mathbf{C} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{C} - \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{C} \\ \mathbf{A} \urcorner \mathbf{b} \urcorner \mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{A}\mathbf{c}\mathbf{b} \end{cases}$$

(245) $$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{B}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{B}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{B} \boxdot (\mathbf{c}\mathbf{a}) = \mathbf{B}_k \boxdot (\mathbf{a}\mathbf{c})$$

(246) $$\mathbf{A} \boxdot \mathbf{B} = \tfrac{1}{3}A_s \cdot B_s + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}_v \cdot \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{A}_d.$$

Die Dyadenrechnung. Eine Dyade ist ein Operator, bestehend aus einem Affinor, verbunden mit $\overline{\times}\!\rceil$, $\llcorner^{\times}$ oder Umkehrungen, und wirkend auf einen Vektor. Da:

(250) $$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{A}_k \\ \mathbf{A} \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{b} = \mathbf{b} \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{A}_k \end{cases}$$

(249) $$\begin{cases} \mathbf{A} \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{b} = (\mathbf{C}\mathbf{A}) \,\underline{\times}\!\rfloor\, \mathbf{b} = (\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{A})\mathbf{b} \\ \mathbf{A}\mathbf{b} = (Ↄ\,\mathbf{A}) \,\ulcorner\!\!\times\, \mathbf{b} = (\mathbf{K}\,Ↄ\,\mathbf{A}) \,\overline{\times}\!\rceil\, \mathbf{b}, \end{cases}$$

sind die vier verschiedenen Formen alle aufeinander zurückzuführen.

$\mathbf{A}\lfloor\!\times$ ist die untere, $\mathbf{A}\,\overline{\times}\rceil$ die obere Dyade des Affinors $\mathbf{A}$. Die Form $\mathbf{A}\lfloor\!\times$ heißt die Normalform. Jeder Affinor kann geschrieben werden entweder als

$$\mathbf{pa} + \mathbf{qb} + \mathbf{rc} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{ap} + \mathbf{bq} + \mathbf{cr},$$

oder als:

$$\mathbf{u} \rceil \mathbf{a} + \mathbf{v} \rceil \mathbf{b} + \mathbf{w} \rceil \mathbf{c} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a} \rceil \mathbf{u} + \mathbf{b} \rceil \mathbf{v} + \mathbf{c} \rceil \mathbf{w},$$

wo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ drei von vornherein gegebene beliebige, aber nicht komplanare Vektoren sind.

Wird ein Affinor in den neun sogenannten algebraischen Einheiten des Systems:

$$\mathbf{I}_{11} = -\,\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{I}_{23} = -\,\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{I}_{32} = -\,\mathbf{i}_3\mathbf{i}_2, \quad \text{cycl.}$$

ausgedrückt:

$$\mathbf{A} = A_{11}\mathbf{I}_{11} + A_{23}\mathbf{I}_{23} + A_{32}\mathbf{I}_{32} + \text{cycl.},$$

so folgt aus (173c), daß die Dyade $\mathbf{A}\lfloor_$, wirkend auf den Ortsvektor $\mathbf{r}$, eine lineare homogene Transformation darstellt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r} = (A_{11}\mathbf{r}_1 + A_{12}\mathbf{r}_2 + A_{13}\mathbf{r}_3)\,\mathbf{i}_1 &+ \\ + (A_{21}\mathbf{r}_1 + A_{22}\mathbf{r}_2 + A_{23}\mathbf{r}_3)\,\mathbf{i}_2 &+ \\ + (A_{31}\mathbf{r}_1 + A_{32}\mathbf{r}_2 + A_{33}\mathbf{r}_3)\,\mathbf{i}_3 &. \end{aligned}$$

Der erste Skalar, oder kurz Skalar, von $\mathbf{A}$ ist:

$$A_s = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

der zweite Skalar:

$$A_{s2} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \text{cycl.},$$

und der dritte Skalar:

$$A_{s3} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Führt $\mathbf{A}\lfloor\!\times$ drei nicht komplanare Vektoren stets in drei nicht komplanare über, so ist $A_{s3} \neq 0$, und A_{s3} gibt das Volumen an, welches das ursprüngliche Einheitsvolumen nach der Transformation einnimmt. Ist $A_{s3} = 0$, so bringt $\mathbf{A}\lfloor\!\times$ alle Vektoren des Raumes in eine Ebene, $\mathbf{A}$ heißt dann ein Teiler der Null; ist auch $A_{s2} = 0$, so bringt $\mathbf{A}\lfloor\!\times$ alle Vektoren in eine Gerade. Ist $A_{s3} \neq 0$, so existiert eine Dyade $\mathbf{A}^{-1}$, die die umgekehrte Transformation bewirkt. Der Affinor

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

ist der Einheitsaffinor. Der Einheitsaffinor ist die als Affinor gefaßte Zahl $\sqrt{3}$. Vermittels $\rceil$ mit Affinoren, oder vermittels $\lfloor\!\times$ mit Vektoren

multipliziert, wirkt der Einheitsaffinor wie die Zahl 1 bei skalarer Multiplikation:

$$\mathbf{I A} = \mathbf{A},$$
$$\mathbf{I a} = \mathbf{a}.$$

(Vgl. S. 136 u. f.) Der Affinor $\mathbf{I} \urcorner \mathbf{a}$ wirkt, vermittels $\llcorner^{\times}$ mit Vektoren multipliziert, wie der Vektor $\mathbf{a}$ bei vektorischer Multiplikation:

$$(\mathbf{I} \urcorner \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Wichtige Umformungsregeln sind:

$$(279) \quad \begin{cases} \text{(a)} & (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \\ \text{(b)} & \mathbf{A}_{s3} = \dfrac{1}{(\mathbf{A}^{-1})_{s3}} \\ \text{(c)} & (\mathbf{A}_k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})_k = \mathbf{A}_k{}^{-1} \\ \text{(d)} & (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ \text{(e)} & (\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n = \mathbf{A}^{-n}. \end{cases}$$

Ein Affinor, dessen untere Dyade eine reine Drehung bewirkt, heißt Rotator. Für Rotatoren, und nur für diese, gilt:

$$(314) \qquad \mathbf{R}_k = \mathbf{R}^{-1}.$$

Jeder Affinor kann auf zwei Weisen geschrieben werden als Produkt eines Tensors und eines Rotators:

$$(313) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}_{Tv}\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_R\mathbf{A}_{Th}.$$

$\mathbf{A}_R$ ist der Rotator, $\mathbf{A}_{Tv}$ der vordere und $\mathbf{A}_{Th}$ der hintere multiplikative Tensor von $\mathbf{A}$.

Die reine Drehung eines Affinors $\mathbf{A}$ wird bewirkt durch folgende Verknüpfung:

$$\mathbf{R A R}^{-1},$$

wo $\mathbf{R}$ der Rotator ist, der mit $\llcorner^{\times}$ dieselbe Drehung bei einem Vektor bewirkt.

Ist $\mathbf{T}$ ein Tensor, so ist

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{T r}) = \mp 1$$

die Gleichung seiner Richtungsfläche. Das Vorzeichen ist eindeutig bestimmt, wenn man die Forderung aufstellt, daß die Fläche reell sein soll, und kein zweischaliges Hyperboloid. Der Radiusvektor $\mathbf{r}$ eines Punktes P dieser Fläche wird durch die Dyade $\mathbf{T} \llcorner^{\times}$ übergeführt in einen Vektor, der mit der Senkrechten aus O auf die Tangentialebene durch P dieselbe Richtung hat, und dem Betrage nach zu dieser + oder − reziprok ist.

Differentialrechnung. Differentiale nach einem Skalar sind wie gewöhnlich zu bilden, nur ist dabei zu beachten, daß die Folge der Faktoren in einem nicht kommutativen Produkt nicht verändert werden darf.

Der negative Differentialquotient einer Größe nach dem Ortsvektor heißt der Gradient. Es ist:

$$-\frac{dp}{d\mathbf{r}} = \operatorname{grad} p = \nabla p$$

$$-\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \operatorname{grad} \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v},$$

wo

$$\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial r_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial r_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial r_3}$$

ein Operatorkern ist, der sich bei Multiplikationen wie ein Vektor verhält. Der Gradient eines Affinors enthält Größen dritter Ordnung, kann also innerhalb der Affinoranalysis nicht in adäquater Weise dargestellt werden.

Für folgende mit ∇ gebildete Operatoren sind besondere Bezeichnungen gewählt:

$$\nabla \cdot = \operatorname{conv}, \qquad \nabla \underline{\llcorner^{\times}} = \operatorname{Conv},$$

$$\nabla \times = \operatorname{rot}, \qquad \nabla \urcorner = \operatorname{Rot},$$

$$\nabla \chi = \operatorname{dev}.$$

Für Skalare ist also:

(339, 350) $$\operatorname{grad} p = \nabla p = \operatorname{conv} p,$$

für Vektoren:

(362) $$\operatorname{grad} \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} = \alpha \operatorname{conv} \mathbf{v} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{dev} \mathbf{v},$$

und für Affinoren:

(363) $$\operatorname{Conv} \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} = \tfrac{1}{3} \operatorname{conv} A_s + \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{A}_v + \operatorname{dev} \mathbf{A}_d.$$

Die Wirkung eines Operators mit ∇ auf irgend ein Produkt von Größen berechnet sich folgendermaßen. Jedenfalls ist

(367) $$\nabla \overset{1}{-\!\circ} (\Phi \overset{2}{-\!\circ} \Psi) = \nabla_{\Phi} \overset{1}{-\!\circ} (\Phi \overset{2}{-\!\circ} \Psi) + \nabla_{\Psi} \overset{1}{-\!\circ} (\Phi \overset{2}{-\!\circ} \Psi),$$

wo $\overset{1}{-\!\circ}$ und $\overset{2}{-\!\circ}$ beliebige Multiplikationen, Φ und Ψ Größen beliebiger Art sind, und wo die Indizes angeben, welche Größe als veränderlich betrachtet werden soll, während man die andere konstant hält. Man suche nun die Assoziationen rechts zu ändern:

$$\nabla \overset{1}{-\!\circ} (\Phi \overset{2}{-\!\circ} \Psi) = (\nabla \overset{3}{-\!\circ} \Phi) \overset{4}{-\!\circ} \Psi + (\nabla \overset{5}{-\!\circ} \Psi) \overset{6}{-\!\circ} \Phi,$$

wodurch die Differentiation auf einfachere zurückgeführt wird[1]). Gelingt

---

1) Dabei darf von einer zufälligen Kommutativität von $\overset{2}{-\!\circ}$ (z. B. wenn $\Phi = \Psi$) kein Gebrauch gemacht werden.

dies mit den Rechnungsregeln der Affinoranalysis nicht, so sind Größen höherer als zweiter Ordnung im Spiel. Es ist aber dann doch immer möglich, den Ausdruck umzuformen, es treten dabei aber Ausdrücke der Form

$$(\Phi \overset{1}{-}\!\circ \nabla) \overset{2}{-}\!\circ \Psi$$

auf. $(\Phi \overset{1}{-}\!\circ \overset{2}{\nabla}) \overset{2}{-}\!\circ$ nennen wir einen abgeleiteten Differentialoperator, diese Operatoren dienen zur Umgehung von Multiplikationen höherer Ordnung. Einige der wichtigsten Umformungsregeln sind:

$$(379)\quad \begin{cases} \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \operatorname{grad}\mathbf{a}\mathbf{b} + \operatorname{grad}\mathbf{b}\mathbf{a} = \\ \qquad = \frac{1}{3}\operatorname{conv}\mathbf{a}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \operatorname{dev}\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{b} \\ \qquad + \frac{1}{3}\operatorname{conv}\mathbf{b}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{b}\times\mathbf{a} + \operatorname{dev}\mathbf{b} \mathbin{X} \mathbf{a}. \end{cases}$$

$$(380)\quad \begin{cases} \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = -\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a}) + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} \\ \qquad -\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} \end{cases}$$

$$(382)\quad \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - (\nabla\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}$$

$$(383)\quad \begin{cases} \nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \operatorname{Rot}\mathbf{a}\mathbf{b} - \operatorname{Rot}\mathbf{b}\mathbf{a} = \\ \qquad = \frac{2}{3}\operatorname{conv}\mathbf{a}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{b} - \operatorname{dev}\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{b} \\ \qquad - \frac{2}{3}\operatorname{conv}\mathbf{b}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{b}\times\mathbf{a} + \operatorname{dev}\mathbf{b} \mathbin{X} \mathbf{a} \end{cases}$$

$$(392)\quad \begin{cases} \nabla \mathbin{X} (\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{b}) = \frac{5}{9}\operatorname{conv}\mathbf{a}\mathbf{b} - \frac{5}{12}\operatorname{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \frac{1}{6}\operatorname{dev}\mathbf{a} \mathbin{X} \mathbf{b} \\ \qquad + \frac{5}{9}\operatorname{conv}\mathbf{b}\mathbf{a} - \frac{5}{12}\operatorname{rot}\mathbf{b}\times\mathbf{a} + \frac{1}{6}\operatorname{dev}\mathbf{b} \mathbin{X} \mathbf{a} \end{cases}$$

$$(394)\quad \nabla(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \operatorname{conv}\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{grad}\mathbf{b}$$

$$(395)\quad \nabla \urcorner (\mathbf{a}\mathbf{b}) = \operatorname{rot}\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{a} \urcorner \operatorname{grad}\mathbf{b}$$

$$(399)\quad \nabla(a\mathbf{B}) = \operatorname{conv} a\mathbf{B} + a \operatorname{Conv}\mathbf{B}$$

$$(400)\quad \nabla \urcorner (a\mathbf{B}) = \operatorname{conv} a \urcorner \mathbf{B} + a \operatorname{Rot}\mathbf{B}$$

$$(401)\quad \nabla\cdot(\mathbf{A}\mathbf{b}) = \operatorname{Conv}\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{A}_k \boxdot \operatorname{grad}\mathbf{b}.$$

Die Aufeinanderfolge zweier Differentialoperatoren mit ∇ ergibt einen Differentialoperator zweiten Grades. Für diese Operatoren gelten u. a. folgende Beziehungen:

$$(413)\quad 3\,a\nabla^{2\cdot} = \nabla^{2\llcorner} + \nabla^{2\urcorner}$$

$$(412)\quad \operatorname{conv}\operatorname{conv} a = \nabla^{2}\cdot a$$

$$(414)\quad \operatorname{rot}\operatorname{conv} a = 0$$

$$(417)\quad \operatorname{conv}\operatorname{conv}\mathbf{a} = \nabla^{2\llcorner}\mathbf{a}$$

$$(418, 419)\quad \operatorname{rot}\operatorname{conv}\mathbf{a} = \operatorname{conv}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$$

$$(420)\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla^{2\urcorner}\mathbf{a}$$

(422) $\operatorname{dev} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \operatorname{dev} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla^{2\times} \times \mathbf{a}$

(425) $\operatorname{dev} \operatorname{dev} \mathbf{a} = \frac{2}{3} \operatorname{conv} \operatorname{conv} \mathbf{a} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}$

(421, 426) $\nabla^2 \cdot \mathbf{a} = \operatorname{conv} \operatorname{conv} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{3} \operatorname{conv} \operatorname{conv} \mathbf{a} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{dev} \operatorname{dev} \mathbf{a}$

(429) $\operatorname{grad} \operatorname{Conv} \mathbf{A} = \nabla^{2\llcorner} \mathbf{A}$

(430) $\operatorname{Rot} \operatorname{Rot} \mathbf{A} = \nabla^{2\neg} \mathbf{A}$

(427, 432) $\operatorname{Rot} \operatorname{grad} \mathbf{a} = \operatorname{Conv} \operatorname{Rot} \mathbf{A} = 0$

(431) $\nabla^2 \cdot \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{Conv} \mathbf{A} + \operatorname{Rot} \operatorname{Rot} \mathbf{A}$

Integralrechnung. Für beliebige Multiplikationen und für beliebige Größen gilt:

(441) $$\int_\sigma \mathbf{n} \multimap \Phi \, d\sigma = \int_\tau \nabla \multimap \Phi \, d\tau,$$

wo σ eine geschlossene Fläche und τ der umschlossene Raum ist, und

(444) $$\int_s d\mathbf{s} \multimap \Phi = \int_\sigma (\mathbf{n} \times \nabla) \multimap \Phi \, d\sigma,$$

wo s eine geschlossene Linie und σ ein umschlossener Flächenteil ist.

Skalar- und Vektorfelder lassen sich durch folgende Formeln angeben als Funktionen ihrer Gradienten und Flächengradienten:

(472) $$\begin{cases} p = \operatorname{conv} \int_\tau \frac{\operatorname{conv} p}{4\pi a_m} d\tau + \operatorname{conv} \int_\mu \frac{\mathbf{n}(p_a - p_i)}{4\pi a_m} d\mu \\ \quad = \operatorname{conv} \int_\tau \frac{\operatorname{grad} p}{4\pi a_m} d\tau + \operatorname{conv} \int_\mu \frac{\mathbf{n}(p_a - p_i)}{4\pi a_m} d\mu \end{cases}$$

(501) $$\mathbf{v} = \operatorname{Conv} \int_\tau \frac{\operatorname{grad} \mathbf{v}}{4\pi a_m} d\tau + \operatorname{Conv} \int_\mu \frac{\mathbf{n}(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_i)}{4\pi a_m} d\mu$$

wo τ der vom Feld eingenommene Raum ist und μ die Unstetigkeitsflächen.

Fassen wir die Flächengradienten auf als Gradienten in einer sehr dünnen Schicht, so gehen die Formeln über in:

(466) $$p = \operatorname{conv} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{conv} p = \operatorname{conv} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{grad} p$$

(505) $$\mathbf{v} = \operatorname{Conv} \operatorname{pot}_\tau \operatorname{grad} \mathbf{v},$$

wobei die Potentialbildung sich sowohl über τ als über μ zu erstrecken hat.

Rechnen wir zu den Senken und Wirbeln von Feldern auch ihre Flächensenken und Flächenwirbel, so lassen sich endliche Vektor- und Affinorfelder, und unendliche, die im Unendlichen genügend stark ver-

schwinden, alle in eindeutiger Weise zerlegen in einen quellenfreien und einen wirbelfreien Bestandteil nach den Formeln:

(473) $$\mathfrak{v} = \operatorname{conv}\int\limits_\tau \frac{\operatorname{conv}\mathfrak{v}}{4\pi a_m}\,d\tau + \operatorname{conv}\int\limits_\mu \frac{\mathfrak{n}\cdot(\mathfrak{v}_a-\mathfrak{v}_i)}{4\pi a_m}\,d\mu$$
$$+ \operatorname{rot}\int\limits_\tau \frac{\operatorname{rot}\mathfrak{v}}{4\pi a_m}\,d\tau + \operatorname{rot}\int\limits_\mu \frac{\mathfrak{n}\times(\mathfrak{v}_a-\mathfrak{v}_i)}{4\pi a_m}\,d\mu$$

(502) $$\mathbf{A} = \operatorname{grad}\int\limits_\tau \frac{\operatorname{Conv}\mathbf{A}}{4\pi a_m}\,d\tau + \operatorname{grad}\int\limits_\mu \frac{\mathfrak{n}(\mathbf{A}_a-\mathbf{A}_i)}{4\pi a_m}\,d\mu$$
$$+ \operatorname{Rot}\int\limits_\tau \frac{\operatorname{Rot}\mathbf{A}}{4\pi a_m}\,d\tau + \operatorname{Rot}\int\limits_\mu \frac{\mathfrak{n}\urcorner(\mathbf{A}_a-\mathbf{A}_i)}{4\pi a_m}\,d\mu\,.$$

Für die Umformung von Feldintegralen gilt die wichtige Formel:

(486, 487, vereinfacht) $$\nabla \multimap \int\limits_\lambda \frac{\Phi}{a_m}\,d\lambda = -\int\limits_\lambda \nabla\frac{1}{a_m} \multimap \Phi\,d\lambda$$
$$= -\int\limits_\lambda \nabla \multimap \frac{\Phi}{a_m}\,d\lambda + \int\limits_\lambda \frac{1}{a_m}\nabla \multimap \Phi\,d\lambda,$$

wo $\multimap$ eine beliebige Multiplikation, Φ eine beliebige Größe und $d\lambda$ ein Linien-, Flächen- oder Raumelement ist.

Die Feldsumme eines endlichen Vektor- und Affinorfeldes berechnet sich aus den Senken und Flächensenken bzw. aus den Wirbeln und Flächenwirbeln nach den Formeln:

(492) $$\int\limits_\tau \mathfrak{v}\,d\tau = \int\limits_\tau \mathfrak{r}\operatorname{conv}\mathfrak{v}\,d\tau - \int\limits_\tau \mathfrak{r}(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v})\,d\sigma$$

(493) $$\int\limits_\tau \mathfrak{v}\,d\tau = \tfrac{1}{2}\int\limits_\tau \mathfrak{r}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v}\,d\tau - \tfrac{1}{2}\int\limits_\tau \mathfrak{r}\times(\mathfrak{n}\times\mathfrak{v})\,d\sigma$$

(516) $$\int\limits_\tau \mathbf{A}\,d\tau = \int\limits_\tau \mathfrak{r}\operatorname{Conv}\mathbf{A}\,d\tau - \int\limits_\tau \mathfrak{r}\,\mathfrak{n}\,\mathbf{A}\,d\sigma$$

(517) $$\int\limits_\tau \mathbf{A}\,d\tau = \tfrac{1}{2}\int\limits_\tau \mathfrak{r}\urcorner\operatorname{Rot}\mathbf{A}\,d\tau - \tfrac{1}{2}\int\limits_\tau \mathfrak{r}\urcorner\mathfrak{n}\urcorner\mathbf{A}\,d\sigma.$$

Zu dem Theorem von Green, welches gestattet, ein Skalarfeld p zu berechnen, wenn $\nabla^2\cdot p$ in jedem Punkt des Feldes, und p und $\mathfrak{n}\operatorname{conv}p$ auf der Begrenzungsfläche bekannt sind:

(489) $$p = -\int\limits_\sigma \frac{1}{4\pi a_m}\,\mathfrak{n}\cdot\operatorname{conv}p\,d\sigma + \int\limits_\tau \frac{1}{4\pi a_m}\nabla^2\cdot p\,d\tau$$
$$+ \int\limits_\sigma \operatorname{conv}\frac{1}{4\pi a_m}\cdot\mathfrak{n}\,p\,d\sigma$$

gesellt sich eine entsprechende Formel für Vektorfelder:

$$
(508)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{v} = -\int_\sigma \frac{1}{4\pi a_m}\, \mathfrak{n}\, \operatorname{grad} \mathfrak{v}\, d\sigma + \int_\tau \frac{1}{4\pi a_m} \nabla^2\cdot \mathfrak{v}\, d\tau \\ + \int_\sigma \operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} (\mathfrak{n}\mathfrak{v})\, d\sigma \end{aligned}\right.
$$

und eine für Affinorfelder:

$$
(515)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A} = -\int_\sigma \frac{1}{4\pi a_m}\, \mathfrak{n} \overset{1}{-}\!\circ (\nabla \overset{2}{-}\!\circ \mathrm{A})\, d\sigma + \int_\tau \frac{1}{4\pi a_m} \nabla^2\cdot \mathrm{A}\, d\tau \\ + \int_\sigma \operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} \overset{1}{-}\!\circ (\mathfrak{n} \overset{2}{-}\!\circ \mathrm{A})\, d\sigma \\ = -\int_\sigma \frac{1}{4\pi a_m} (\mathfrak{n}\cdot\nabla)\, \mathrm{A}\, d\sigma + \int_\tau \frac{1}{4\pi a_m} \nabla^2\cdot \mathrm{A}\, d\tau \\ + \int_\sigma \left(\operatorname{conv} \frac{1}{4\pi a_m} \cdot \mathfrak{n}\right) \mathrm{A}\, d\sigma. \end{aligned}\right.
$$

Die Multiplikationen $\overset{1}{-}\!\circ$ und $\overset{2}{-}\!\circ$ in der letzten Formel gehören der Analysis dritter Ordnung an, es ergibt sich hier also ein Beispiel der Umgehung höherer Multiplikationen durch den Gebrauch von abgeleiteten Differentialoperatoren.

LITERATURVERZEICHNIS[1])

1840 1. O. Rodrigues, Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace etc. Journ. de Math. 5, S. 380—440.

1844 1. H. Graßmann, Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig.

1852 1. M. O'Brien, On Symbolic forms derived from the conception of the translation of a directed magnitude. Phil. trans. 142, S. 161.

1853 1. W. R. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin.

1855 1. H. Graßmann, Sur les différents genres de multiplication. Crelles Journ. 49, S. 47—65.

1858 1. Cayley, A memoir on the theory of matrices. Phil. trans. London 48, S. 17—37, Ges. Werke 2, S. 475—496.

1862 1. H. Graßmann, Die Ausdehnungslehre, Berlin.

1866 1. W. R. Hamilton, Elements of Quaternions, London.

1867 1. H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig.

1872 1. F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen. (Vgl. 93. 9.)

1875 1. V. Schlegel, System der Raumlehre, II. Teil. (I. Teil 1872.)

1876 1. W. K. Clifford, On the classification of geometric algebras. Lond. Math. Soc. Proc. 7, S. 135.

1878 1. W. K. Clifford, Application of Grassmanns extensive algebra. Amer. Journ. Math. 1, S. 350—358.

2. F. G. Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. Crelles Journ. 84, S. 1—63.

1881 1. B. Peirce, Linear assoziative Algebra. Am. Journ. Math. 4, S. 97—221.

2. C. S. Peirce, On the relative forms of the algebras. Ebenda S. 221—225.

3. C. S. Peirce, On the algebras in which division is unambigous. Ebenda S. 225—227.

4. W. Gibbs, Element of Vector Analysis, erster Teil. Newhaven (privately printed). Ges. Werke 2, S. 17—50.

1884 1. E. W. Hyde, Calculus of direction and position. Am. Journ. 6 S. 1—13.

2. W. Gibbs, Elements of Vector Analysis, zweiter Teil. Newhaven (privately printed). Ges. Werke 2, S. 50—90.

3. J. J. Sylvester, Lectures on the principles of universal algebra. Am. Journ. 6, S. 270—286.

1885 1. O. Heaviside, On the electromagnetic wave-surface. Phil. mag. 5 (19), S. 397—419, El. Papers 2, S. 1—23.

1) Es sind nur diejenigen Bücher und Verhandlungen aufgenommen, auf die im Text verwiesen ist.

1886 1. J. W. Gibbs, On Multiple Algebra. Proc. Amer. Assoc. 35, S. 37—66. Ges. Werke S. 91—117.

1888 1. F. Schur, Zur Theorie der aus n Einheiten gebildeten komplexen Zahlen. Math. Ann. 33, S. 49—60.

1890 1. H. Taber, On the theory of matrices. Am. Journ. 12, S. 337—396.
2. E. Study, Über die Bewegungen des Raumes. Leipz. Ber. 42, S. 340.

1891 1. G. W Scheffers, Zurückführung komplexer Zahlensysteme auf typische Formen. Math. Ann. 39, S. 293—390.
2. W. Gibbs, On the role of quaternions in the algebra of vectors. Nature 43, S. 511—513. Ges. Werke 2, S. 155—160.
3. P. G. Tait, The role of quaternions in the algebra of vectors. Nature 43, S. 608.
4. W. Gibbs, Quaternions and the Ausdehnungslehre. Nature 44, S. 79—82. Ges. Werke 1, S. 161—168.

1892 1. O. Heaviside, On the forces, stresses and fluxes of energy in the electromagnetic field. Phil. trans. S. 423. E. papers 2, S. 521—574.
2. C. G. Knott, Recent innovations in vector theory. Proc. Roy. Soc. Ed. 19, S. 212—237.
3. A. Macaulay, Quaternions. Nature 47, S. 151.
4. P. Tait, Vectoranalysis. Nature 47, S. 225—226.
5. J. W. Gibbs, Quaternions and the algebra of vectors. Nature 47, S. 463—464. Ges. Werke 2, S. 169—172.
6. O. Heaviside, Vectors versus Quaternions. Nature 47, S. 533—534.

1893 1. A. Macfarlane, Vectors, versors, quaternions. Nature 48, S. 75—76.
2. C. G. Knott, Vectors and quaternions. Nature 48, S. 148—149.
3. A. Lodge, Vectors and quaternions. Nature 48, S. 198—199.
4. J. W. Gibbs, Quaternions and vectoranalysis. Nature 48, S. 364—367. Ges. Werke 2, S. 173—191.
5. R. S. Ball, The discussion on quaternions. Nature 48, S. 391.
6. C. G. Knott, Quaternions and vectors. Nature 48, S. 516—517.
7. A. Macfarlane, Vectors and quaternions. Nature 48, S. 540—541.
8. H. Burkhardt, Über Funktionen von Vektorgrößen, welche selbst wieder Vektorgrößen sind. Gött. Nachr. S. 155—159, Math. Ann. 43, S. 197—215.
9. F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Math. Ann. 43, S. 63—100. (Neuabdruck von 1872.)

1894 1. H. Graßmann, Die lineale Ausdehnungslehre. Ges. Werke I. Band, I. Teil.

1896 1. H. Graßmann, Die Ausdehnungslehre. Ges. Werke I. Band, II. Teil.
2. A. Macfarlane, Vectoranalysis and quaternions. New York.
3. H. Burkhardt, Über Vektoranalysis. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 5, S. 43—52.

1897 1. J. Joly, The associative algebra of hyper-space. Proc. R. I. Acad. III, 5, S. 73—123.
2. A. Föppl, Geometrie der Wirbelfelder, Leipzig.

1898 1. A. N. Whitehead, A treatise on universal algebra, Cambridge.

1900 1. J. Joly, On the place of the Ausdehnungslehre in the general associative algebra of the quaternion type. Proc. R. I. Acad. III, 6, S. 13—18.
2. W. Voigt, Über die Parameter der Kristallphysik und gerichtete Größen höherer Ordnung. Gött. Nachr. S. 355—379.

1900 3. E. Study, Geometrie der Dynamen. Leipzig.

4. F. X. Grissemann, Elementarer Nachweis des Satzes von Frobenius über die Ausnahmestellung der Quaternionen unter den komplexen Zahlensystemen von mehr als zwei Einheiten. Mon. für Math. und Phys. 11, S. 132—147.

1901 1. W. Voigt, Über die Parameter der Kristallphysik und gerichtete Größen höherer Ordnung. Ann. der Physik 5, S. 241—275.

2. E. B. Wilson, Vector Analysis, Newhaven 1901. Zweite Auflage 1913, auf diese beziehen sich die Seitenangaben.

3. M. Abraham, Geometrische Grundbegriffe. Enc. der math. Wiss. IV, 14.

1902 1. E. Carvallo, Conférence sur les notions du calcul géométrique. Nouv. Annales, 4. Serie 2, S. 433—442.

2. F. Klein, Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball. Zeitschr. für Math. und Phys. 47, S. 237—265.

1903 1. L. Prandtl, Grundsätze für eine einheitliche Schreibung der Vektorenrechnung im technischen Unterricht. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 12, S. 444—445.

2. F. G. Frobenius, Theorie der hyperkomplexen Größen. Berliner Ber. S. 504—537, 634—645.

3. O. Henrici, Discussions on the introduction of vectorial methods in physics. Meeting Brit. Ass. Adv. Sc. Nature 68, S. 609—610.

4. A. Föppl, Lösung des Kreiselproblems mit Hilfe der Vektorenrechnung. Zeitschr. für Math. und Phys. 48, S. 272—284.

5. E. Waelsch, Über Binäranalyse. Wien. Ber. 112, S. 645—665, 1091—1097, 1533—1552.

1904 1. L. Prandtl, Über eine einheitliche Bezeichnungsweise der Vektorenrechnung im technischen und physikalischen Unterricht. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 13, S. 36—40.

2. R. Mehmke, Vergleich zwischen der Vektoranalyse amerikanischer Richtung und derjenigen deutsch-italienischer Richtung. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 13, S. 217—228.

3. A. Macfarlane, The notations and fundamental principles of vector-analysis. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 13, S. 228—233.

4. L. Prandtl, Über die physikalische Richtung in der Vektoranalyse. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 13, S. 436—449.

5. W. Voigt, Etwas über Tensoranalysis. Gött. Nachr. S. 495—513.

6. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis. Leipzig, zweite Auflage 1909, auf diese beziehen sich die Seitenangaben.

7. R. Marcolongo, Theoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici. Milano.

8. E. Waelsch, Über lineare Vektorfunktionen als binäre doppeltquadratische Formen. Wien. Ber. 113, S. 1081—1106.

9. E. Waelsch, Über die höheren Vektorgrößen der Kristallphysik als binäre Formen. Ebenda S. 1107—1119.

10. E. Waelsch, Über Reihenentwicklungen mehrfach binärer Formen. Ebenda S. 1209—1217.

1905 1. J. V. Collins, Correlation of vector analysis notations. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 14, S. 164—167.

1905 2. C. G. Knott, Hamiltons Quaternion Vector Analysis. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 14, S. 167—171.

3. E. B. Wilson, On products in additive fields. III. Math.-Kongr. Heidelberg S. 202.

4. E. Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Leipzig.

5. A. Macfarlane, A discussion on the notation and fundamental principles of vectoranalysis. Bull. Int. ass. for the prom. of the study of quat. etc. S. 22.

6. G. Jaumann, Die Grundlagen der Bewegungslehre. Leipzig.

7. R. Marcolongo, Meccanica razionale. Milano. Deutsche Übersetzung von H. E. Timerding, Leipzig 1911. Auf diese Ausgabe beziehen sich die Seitenangaben.

8. O. Blumenthal, Über Zerlegung unendlicher Vektorfelder. Math. Ann. 61, S. 235—250.

9. E. Waelsch, Über die Resultante binärer Formen. Wien. Ber. 114, S. 1143—1146.

1906 1. J. W. Gibbs, Scientific papers. Vol. II. London.

2. F. Klein, Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball. Math. Ann. 62, S. 419—448.

3. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Sulle omografie vettoriali. Atti die Torino 42, S. 100—120.

4. E. Waelsch, Über Binäranalyse und elastische Potentiale. Wien. Anz. S. 158—161.

5. E. Waelsch, Über mehrfache Vektoren und ihre Produkte, sowie deren Anwendung in der Elastizitätstheorie. Monatshefte für Math. und Phys. 17, S. 241—280.

1907 1. J. H. Maclagan Wedderburn, On hypercomplex numbers. Proc. Lond. Math. Soc. 6, S. 77.

2. A. Macaulay, Algebra after Hamilton, or Multenions. Proc. R. Soc. Edinb. 28, S. 503.

3. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. Note I Rend. di Palermo 23, S. 324—328.

4. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. Note II Rend. di Palermo 23, S. 65—80.

5. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. Note III Rend. di Palermo 24, S. 318—332.

6. C. H. Müller und A. Timpe, Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie. Enc. der math. Wiss. IV 23.

7. O. Tedone, Allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätslehre (Integrationstheorie). Enc. der math. Wiss. IV 24.

8. E. Waelsch, Sur les fonctions sphériques et leurs multipèdes. C. R. 144, S. 186—189.

9. E. Waelsch, Sur les invariants différentiels et la théorie des formes binaires. C. R. 145, S. 1396—1399.

1908 1. F. Jung, Einige vektoranalytische Bezeichnungs- und Benennungsfragen. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 17, S. 383—390.

2. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. Rend. di Palermo Note IV 25, S. 352—375.

1908 3. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. Rend. di Palermo Note V 26, S. 369—377.
4. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Iquaternioni di Hamilton e il calcolo vettoriali. Atti di Torino 714—732.
5. F. Jung, Ableitungsbildung im räumlichen Größenfelde. Zeitschr. für Math. u. Phys. 56, S. 337—354.
6. G. Jaumann, Elektromagnetische Theorie. Wien. Ber. 117, S. 379—544.
7. C. Burali Forti, L'importance des transformations linéaires des vecteurs dans le calcul vectoriel général. Ens. Math. 10, S. 411—417.
8. H. Witte, Weitere Untersuchungen über die Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen usw. Ann. der Phys. 26, S. 235—311.
9. H. Liebmann, Über die Darstellung eines quellenfreien Vektorfeldes. Leipz. Ber. S. 176—189.
10. R. Schimmack, Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition. Nova Acta Leop. 60, S. 5—104.
11. E. Waelsch, Über die Entwicklung des Produktes von Kugelfunktionen nach Kugelfunktionen. Wien. Ber. 118, S. 85—90.
1909 1. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Notations rationelles pour le système vectoriel minimum. Ens. Math. 11, S. 41.
2. C. Combébiac, A propos d'un article de M. Burali Forti sur le calcul vectoriel. Ens. Math. 11, S. 46.
3. H. Timerding, Antwort auf den Vorschlag von B.F. und M. Ens. Math. 11, S. 129—134.
4. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Antwort an C. Combébiac. Ens. Math. 11, S. 134.
5. F. Klein, Antwort auf den Vorschlag von B. F. und M. S. 211.
6. E. B. Wilson, dasselbe S. 211—216.
7. G. Peano, dasselbe S. 216—217.
8. E. Carvallo, dasselbe S. 381.
9. E. Jahnke, dasselbe S. 381.
10. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Antwort an H. Timerding. S. 460—463.
11. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Antwort an E. B. Wilson. S. 463—466.
12. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Omografie Vettoriali, Torino.
13. W. von Ignatowsky, Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. Leipzig.
14. R. Marcolongo, Per l'unificazione delle notazione vettoriali. Atti del IV congr. int. Rom, 3, S. 191—197.
15. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Elementi di Calcolo Vettoriali, Bologna (Französische Übersetzung Paris 1910).
16. F. Jung, Zur vektoranalytischen Darstellung des Tensors. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 18, S. 386—396.
17. R. H. Weber, Über asymmetrische und symmetrische Tensoren. Gött. Nachr. S. 371—390.
18. F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Leipzig (zweite Auflage 1913).
19. H. A. Lorentz, The theory of electrons. Leipzig.

1909 20. V. Bjerknes, Die Kraftfelder. Braunschweig.

21. E. Waelsch, Über Kugelfunktionen, ihre binäre Formen und Vielbeine. Monatshefte für Math. und Phys. 20, S. 289—320.

22. A. Macfarlane. On the square of Hamiltons delta Atti del IV Congr. int. Rom., 3 S. 153—157.

1910 1. C. G. Knott, Antwort auf den Vorschlag von B. F. und M. Ens. Math. 12, S. 39—45.

2. A. Macfarlane, dasselbe S. 45—46.

3. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Antwort an E. Carvallo. S. 46.

4. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Antwort an C. G. Knott. S. 47—53.

5. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Antwort an A. Macfarlane. S. 53—54.

6. J. Rose, Junius Massau, Courte notice sur sa vie et ses travaux en mécanique et en géométrie vectorielle. S. 187—200.

7. E. B. Wilson, The unification of vectorial notations. Bull. Amer. Math. Soc. 16, S. 415—436.

8. T. Boggio, Sul gradiente di una omografie vettoriali. Atti dei Lincei 19, 2, S. 383—389.

9. P. Burgatti, Risoluzioni di alcuni problemi relativi ai campi vettoriali. Rend. di Bol. 14, S. 129—135.

10. C. Somigliano, Sopra un' estenzione della teoria del l'elasticita. Atti dei Linc. 19, 1, S. 43—50.

1911 1. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Antwort an E. B. Wilson. Enc. Math. 13, S. 138—148.

2. E. B. Wilson, Antwort an C. Burali Forti und R. Marcolongo. S. 391—393.

3. Maumatha Nath Ray, Fundamental notions in vectoranalysis. Nature 86, S. 280—281. Nachschrift von C. G. Knott.

4. C. Burali Forti, Sull l'operatore di Laplace per le omografie vettoriali. Atti dei Lincei 20, 1, S. 10—16.

5. C. Burali Forti, Sopra un nuovo operatore differenziale per le omografie vettoriali. S. 641—648.

1912 1. A. Macfarlane, On vectoranalysis as generalised algebra. Int. Math. Congr. Cambridge I S. 267—282.

2. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Sur les dyads et dyadics de Gibbs. Ens. Math. 14, S. 276.

3. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Analyse vectorielle generale. I. Transformations lineaires. Pavie.

4. O. Wiener, Die Theorie des Mischkörpers für das Feld der stationären Strömung. Leipz. Abh. 32, S. 509.

1913 1. C. Burali Forti und R. Marcolongo, Analyse vectorielle generale. II. Applications a la mecanique et a la physique. Pavie.

2. E. B. Wilson, The unification of vectorial notations. Bull. Am. Math. Soc. 19, S. 524—530.

1914 1. J. A. Schouten, Zur Klassifizierung der assoziativen Zahlensysteme. Math. Ann.

INDEX.

